Jürgen Zumdick

Ein Bruchrechenlehrgang

1. **Anknüpfen an Vorwissen**

   $\frac{1}{2}kg$ (Hälfte von einem kg; 1kg:2 = 1000g:2 = 500g; 0,5kg)

   $\frac{3}{4}l$ ($3\cdot\frac{1}{4}l$; 3·(1l:4) = 3·(1000ml:4)=3·250ml=750ml; 0,75 l)

   Stichworte: Bedeutung des Bruches als Teil eines Ganzen; Umwandlung in kleinere Einheiten; parallele Verwendung von einfachen Dezimalbrüchen; Anbahnung einer Interpretation des Bruches als Division; Einführung der Begriffe Zähler und Nenner

2. **Zwei Interpretationen eines Bruches**

   $\frac{1}{4}l = 1l:4$, also $\frac{3}{4}l = 3l:4$?

   Überprüfung: 3l : 4 = 3000ml : 4 = 750ml = $\frac{3}{4}l$. $\frac{3}{4}l$ kann also interpretiert werden als $3\cdot\frac{1}{4}l$ (wie bei 1.) oder als $3l:4$

   Die Aufgabe „Teile 3 Pizzen auf 4 Personen auf (bildliche Darstellung!) führt noch einmal auf die Bedeutung des Bruchstriches als Divisionszeichen.

   $3P:4=\frac{3}{4}P$ (Zunächst wird eine Pizza in 4 Teile zerlegt, von den 3 Pizzen bekommt dann jede Person $\frac{1}{4}$. (Beachte: Hier wird ein Bruch ohne Größenbezeichnung verwendet.)

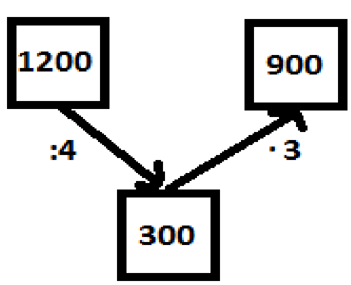
   Nun kann auch die Darstellung einer ganzen Zahl durch einen Bruch eingeführt werden: $5=\frac{5}{1}=\frac{10}{2}$.

3. **Eine weitere Interpretation: Der Bruch als Anteil**

   $\frac{1}{4}$ von 1200 m = 1200 m : 4 = 300 m

   $\frac{3}{4}$ von 1200 m = 3·($\frac{1}{4}$ von 1200 m) = 3·300 m = 900 m

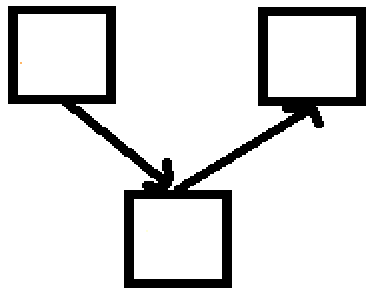
   In Diagrammform:



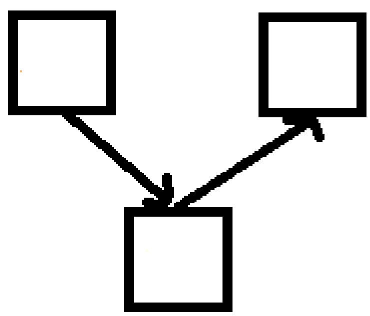
Durch Umkehren der Pfeile ergeben sich weitere Aufgabentypen (siehe nachfolgendes Arbeitsblatt).

1) Fülle zu jeder der folgenden drei Aufgaben das zugehörige Diagramm aus. Kennzeichne im Diagramm die gegebenen Größen mit grüner und die berechnete Größe mit roter Farbe.

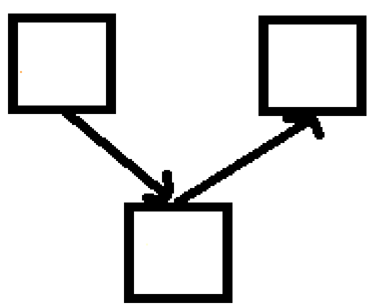
a) Ein Eisenträger wiegt 256 kg. $\frac{3}{4}$ des Trägers wird abgeschnitten. Wie viel wiegt das abgeschnittene Stück?



b) Bernd verlor beim Spiel 42 Murmeln. Das waren $\frac{3}{7}$ seiner Murmeln. Wie viel besaß er vorher?



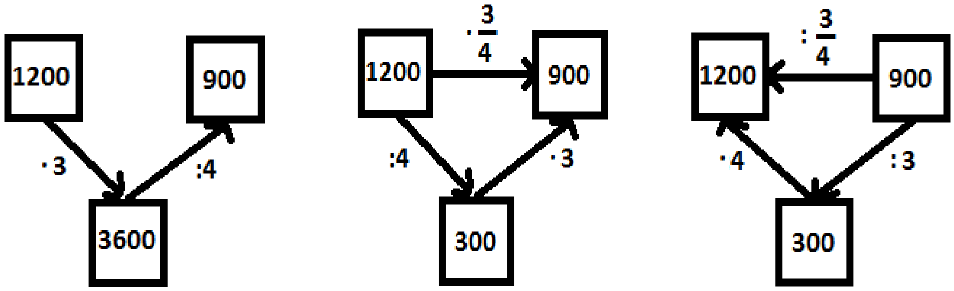
c) Katja ist mit 24 Stimmen zur Klassensprecherin gewählt worden. Es wurden insgesamt 30 Stimmen abgegeben. Welchen Anteil der Stimmen erhielt Katja?



2) Worin unterscheiden sich die drei Aufgaben?

3) Denke dir zu jedem Aufgabentyp eine eigene Aufgabe aus.

Das Vertauschen der Pfeile, die Einführung eines neuen Pfeils sowie die Umkehrung der Pfeile bereiten die Multiplikation und Division einer ganzen zahl mit einem Bruch vor:



4. **Erweitern und Kürzen**

Die bekannten Pizzen- oder Schokoladendiagramme zeigen, dass

$\frac{1}{2} Pizza = \frac{2}{4} Pizza$

$\frac{2}{3} Pizza = \frac{8}{12} Pizza$ (Man teilt die Pizza in 3 (12) Teile und nimmt 2 (8) davon)

Verdoppelt (verdreifacht, vervierfacht) man die Anzahl der Teile eines Ganzen (d.h. den Nenner), so muss man auch doppelt (dreimal, viermal) Teile nehmen.

Einführung der Begriffe Erweitern und Kürzen, Loslösen vom Größenbereich, da die Regeln unabhängig von der verwendeten Maßbezeichnung gelten.

Schreibweisen: $\frac{2}{3} \overset{4}{=} \frac{8}{12}$; $\frac{8}{12} \underset{4}{=} \frac{2}{3}$

Regel:

Verbal	Formal
Zwei Brüche werden erweitert/gekürzt, indem man Zähler und Nenner mit derselben von Null verschiedenen Zahl multipliziert/dividiert.	$\frac{a}{b} \overset{c}{=} \frac{a \cdot c}{b \cdot c}, b \neq 0, c \neq 0$ $\frac{a}{b} \underset{c}{=} \frac{a : c}{b : c}, b \neq 0, c \neq 0$

5. **Unechte Brüche - Gemischte Schreibweise**

In $\frac{8}{7}$ stecken $\frac{7}{7}$ und $\frac{1}{7}$. Also: $\frac{8}{7} = \frac{7}{7} + \frac{1}{7} = 1 + \frac{1}{7} = 1\frac{1}{7}$

Es wird die Addition vorbereitet und die gemischte Schreibweise eingeführt:

$2\frac{7}{8} = 2 + \frac{7}{8} = \frac{16}{8} + \frac{7}{8} = \frac{23}{8}$ (23 = 2·8 + 7)

$\frac{40}{8} = 5$, weil $\frac{8}{8} = 1$. Erinnerung an die Bedeutung des Bruchstrichs:

$\frac{40}{8} = 40 : 8 = 5$

$\frac{23}{8} = 23 : 8 = 2 + 7 : 8 = 2\frac{7}{8}$

6. Ordnen

a) Die Nenner sind gleich: $\frac{3}{8}<\frac{5}{8}$.Das Ganze wurde in 8 gleich große Teile zerlegt. Dann sind 3 Teile weniger als 5 Teile.

b) Die Zähler sind gleich: $\frac{3}{8}<\frac{3}{5}$. Ein Achtel ist kleiner als ein Fünftel des Ganzen. Also gilt dies auch für jeweils drei dieser Teile.

c) Sind Nenner und Zähler verschieden, so sollten beide Strategien (auf gleiche Nenner, auf gleiche Zähler bringen) beherrscht werden.

d) Sonderstrategien:

$2\frac{7}{8}<3\frac{3}{7}$, weil $2\frac{7}{8}$ unter 3 und $3\frac{3}{7}$ über 3 liegt

$\frac{7}{8}>\frac{3}{7}$weil $\frac{7}{8}>\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{7}<\frac{1}{2}$

$\frac{9}{10}>\frac{8}{9}$weil bei $\frac{9}{10}$weniger bis 1 fehlt als bei $\frac{8}{9}$

$\frac{31}{17}<\frac{29}{12}$ weil $\frac{31}{17}$kleiner als 2 und $\frac{29}{12}$ größer als 2 ist.

7. Addition und Subtraktion

a) Zunächst wird die Addition und Subtraktion mit gleichnamigen Brüchen (unterstützt von bildlichen Darstellungen) behandelt. Hierauf kann verzichtet werden, wenn dies schon bei 5. intensiv geübt wurde.

b) Bei ungleichnamigen Brüchen wird das Verfahren aus a) angewandt. Den üblichen Fehlern (z.B. Addition von Zählern und Nennern) begegnet man mit einfachen Beispielen: $\frac{2}{3}+\frac{5}{4}=\frac{7}{7}?$. Dies muss auch bei den Schülern als dauerhafte Strategie verinnerlicht werden: „Bist du dir nicht sicher, so wähle ein einfaches Beispiel wie: $\frac{1}{1}+\frac{2}{2}=\frac{3}{3}?$“

c) Regeln

Verbal	Formal
Zwei Brüche mit gleichem Nenner werden addiert/subtrahiert, indem man die Zähler addiert/subtrahiert und den Nenner beibehält.	$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}$ $c\neq 0$
Zwei Brüche mit verschiedenen Nennern werden addiert/subtrahiert, indem man die Brüche auf den gleichen Nenner bringt (gleichnamig macht) und vorstehende Regel anwendet	$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{d}=\frac{a\cdot k}{c\cdot k}\pm\frac{b\cdot l}{d\cdot l}=\frac{a\cdot k\pm b\cdot l}{e}$ $wobei$ $e=ggT(c,d),\cdots k=e:c, l=e:d$ $c\neq 0, d\neq 0$

d) Erweiterung auf gemischte Schreibweise:

$3\frac{2}{5}+2\frac{1}{2}=\frac{17}{5}+\frac{5}{2}=\frac{34}{10}+\frac{25}{10}=\frac{59}{10}=5\frac{9}{10}$

Besseres Verfahren: $3\frac{2}{5}+2\frac{1}{2}=3+\frac{2}{5}+2+\frac{1}{2}=5+\frac{4}{10}+\frac{5}{10}=5\frac{9}{10}$

8. Multiplikation

a) $\frac{2}{3}kg \cdot 5 = \frac{2}{3}kg + \frac{2}{3}kg + \frac{2}{3}kg + \frac{2}{3}kg + \frac{2}{3}kg = \frac{10}{3}kg$

b) $5 \cdot \frac{2}{3}kg = \frac{2}{3}kg \cdot 5$ (Permanenzprinzip: Kommutativgesetz)

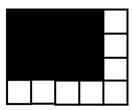
c) Trennung der Brüche vom Größenbereich

$\frac{1}{3} \cdot 5$ wird interpretiert als $\frac{1}{3}$ von 5 (3. Teil von 5 – siehe 3.)

$\frac{1}{3} \cdot 5 = \frac{5}{3}$ analog zu a) oder $\frac{1}{3} \cdot 5 = \frac{1}{3} von \frac{15}{3} = \frac{5}{3}$

$\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{4} von \frac{12}{20} = \frac{3}{20}$

$\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{12}{20} = 3 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5}\right) = 3 \cdot \frac{3}{20} = \frac{9}{20}$ (Permanenzprinzip: Assoziativgesetz)

oder: $\frac{3}{4}m \cdot \frac{4}{5}m$ (Permanenzprinzip: Flächeninhaltsberechnung von Rechtecken)  $\frac{3}{4}m \cdot \frac{4}{5}m = \frac{12}{20}m^2$

d) Regel

Verbal	Formal
Zwei Brüche werden multipliziert, indem man die Zähler und die Nenner multipliziert.	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, b \neq 0, d \neq 0$

9. Division

a) $\frac{2}{3} : 5 = \frac{10}{15} : 5 = \frac{2}{15}$

$1 : \frac{1}{6} = 6$ (wie oft ist $\frac{1}{6}$ in 1 enthalten)

$2 : \frac{1}{6} = 12$

$2 : \frac{5}{6} = 2 : \left(\frac{1}{6} \cdot 5\right) = 2 : \frac{1}{6} : 5 = \frac{12}{5}$ (Plausibilitätsbetrachtung: 100 : (10 · 2) = 100:10:2)

$\frac{2}{3} : \frac{5}{6} = \frac{1}{3} \cdot \left(2 : \frac{1}{6} : 5\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{12}{5} = \frac{12}{15}$

auch mit Größen möglich: Wie oft ist $\frac{1}{4}m^2$ in $\frac{1}{2}m^2$ enthalten?

b) Umkehrung der Multiplikation

$\frac{2}{5}:\frac{3}{4}=\frac{x}{y}$, also $\frac{x}{y}\cdot\frac{3}{4}=\frac{2}{5}$ Da $\frac{2}{5}$ gekürzt sein kann, gilt auch:

$\frac{x}{y}\cdot\frac{3}{4}=\frac{2}{5}=\frac{4}{10}=\frac{8}{20}=\frac{24}{60}$

also x = 8 und y = 15

oder:

$\frac{x}{y}\cdot\frac{3}{4}=\frac{2}{5}$, also: $\frac{x}{y}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}=\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3}$. also $\frac{x}{y}=\frac{8}{15}$

c) Arbeitsblatt zum Erkennen einer Regel für die Division

1. Wir wissen aus dem vorhergehendem Unterricht:

Aufgabe	Probe
$\frac{1}{4}:\frac{1}{4}=1$ $\frac{1}{4}$ ist einmal in $\frac{1}{4}$ enthalten	$1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$
$\frac{3}{4}:\frac{3}{4}=1$ $\frac{3}{4}$ ist einmal in $\frac{3}{4}$ enthalten	$1\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$
$\frac{3}{4}:\frac{1}{4}=3$ $\frac{1}{4}$ ist dreimal in $\frac{3}{4}$ enthalten	$3\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$
$\frac{15}{4}:\frac{3}{4}=5$ $\frac{3}{4}$ ist fünfmal in $\frac{15}{4}$ enthalten	$5\cdot\frac{3}{4}=\frac{15}{4}$

2. Welche vorläufige Regel kannst du erkennen?

3. Löse nun die nachfolgenden Aufgaben

Aufgabe	Probe
$\frac{15}{43}:\frac{3}{43}=$	
$\frac{15}{4}:\frac{3}{8}=$	
$\frac{15}{4}:\frac{5}{8}=$	
$\frac{21}{15}:\frac{2}{5}=$	
$\frac{9}{6}:\frac{3}{4}=$	

$\frac{9}{6}:\frac{1}{5}=$	
$\frac{9}{6}:\frac{2}{5}=$	

d) Regel

Verbal	Formal
Zwei Brüche werden dividiert, indem man den ersten Bruch mit dem Kehrwert des zweiten Bruchs multipliziert.	$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}, b\neq 0, c\neq 0, d\neq 0$

10. Strategien

Zur Vermeidung von Fehlern sollten während des gesamten Lehrgangs Strategien eingeübt werden:

1. Greife auf bildhafte Darstellungen zurück.
2. Verwende einfache Zahlenbeispiele, um eine Regel zu überprüfen.
3. Mache die Probe mit Hilfe der Umkehraufgabe.
4. Beachte den Unterschied zwischen Erweitern und Multiplizieren sowie zwischen Kürzen und Dividieren.

11. Anwendungen

a) Schokolade (Quelle: Impulse für das interkulturelle Lernen, Heft 12, RAA)

In der Schweiz wurde einmal errechnet, wer wie viel von einer 300g Tafel bekommt. Die Anzahl der Stückchen entsprechen den Anteilen am Verkaufspreis.

Handel	12 Stückchen
Schokoladenfirma	16 Stückchen
Einkauf	8 Stückchen
Kakaobauer	2,5 Stückchen
Sonstige Rohstoffe	1,5 Stückchen

1. Rechne die Schweizer Angaben auf die in Deutschland übliche 100g Tafel Schokolade mit 24 Stückchen um.
2. Welchen Anteil vom Verkaufspreis bekommt der Kakaobauer, welchen Anteil die Schokoladenfirma? Wie viel Mal mehr bekommt die Schokoladenfirma gegenüber dem Kakaobauern?
3. Stelle die Schweizer Tafel (40 Stückchen von je 0,5 cm x 1 cm im

2,5 cm x 8 cm Rechteck) und die deutsche (24 Stückchen im 2 cm x 6 cm Rechteck) zeichnerisch dar und trage die Anteile am Verkaufspreis entsprechend farbig ein.
4. Von der Schweizer Tafel bleiben 12/40 der Rohstoffe (Einkauf, Kakaobauer, Sonstige Rohstoffe) des Verkaufspreises im Herkunftsland. Bei dem El Ceibo Kakao aus den Eine-Welt-Läden bleiben 37 % (=37/100) im Herkunftsland Bolivien. Vergleiche.

b) Eine Gangschaltung hat 3 Blätter mit 24, 36 und 46 Zähnen sowie 7 Ritzel mit 12, 14, 16, 18, 21, 24 und 28 Zähnen.
1. Wie liegt die Kette beim kleinsten/größten Gang? Wie viele Umdrehungen macht das Hinterrad bei einer Pedalumdrehung in diesen beiden Gängen? Kläre die Begriffe Übersetzung und Untersetzung.
2. Stelle eine Tabelle mit allen „Übersetzungen“ auf. Welche Gänge sind identisch? Welche Gänge unterscheiden sich um weniger als $\frac{1}{10}$ Umdrehungen des Hinterrades (bei einer Pedalumdrehung)?
3. Wie könnte geschaltet werden, damit man aus dem kleinsten Gang möglichst gleichmäßig in den größten Gang kommt?

c) Siehe Datei „Tonleiter als Anwendung der Bruchrechnung“

d) Römische Brüche

Grundbrüche:

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{72}$
S	—	Σ	⊃	Z

Zusammengesetzte Brüche:

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$
— — — —	— — —	S — — —	— —	Σ —	— Z Z

$\frac{5}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{11}{12}$
— — — — —	S — —	S —	S — — — —	S — — — — —

Erkläre die zusammengesetzten Brüche.

12. Unterschiede in den Zahlbereichen

a) Zwischen zwei Brüchen liegt immer ein weiterer Bruch (z.B. das arithmetische Mittel).

b)

Zahlbereich	Vorgänger	Nachfolger
Natürliche Zahlen	Zu jeder Zahl außer 1	Zu jeder Zahl
Ganze Zahlen	Zu jeder Zahl	Zu jeder Zahl
Brüche	Zu keiner Zahl	Zu keiner Zahl

c) Eine kleine wahre Geschichte:
Nachdem im Unterricht die Eigenschaft unter a) erarbeitet worden war, wurde in einer Klassenarbeit folgende Aufgabe gestellt:
Ein Lehrer sagte zu seinem Schüler „Nenne mir einen Bruch und ich sage dir den nächstgrößeren Bruch“. Was meinst du dazu?
Ein Schüler schrieb folgende Antwort:
„Der Lehrer müsste den Bruch nennen und der Schüler muss dann den nächstgrößeren angeben. Denn der Schüler muss ja noch lernen und nicht der Lehrer.“