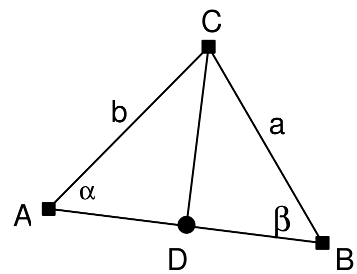
Kongruenzsätze und trigonometrische Funktionen
(Zusammenstellung unterschiedlicher Berechnungsverfahren)

Jürgen Zumdick



1. Kongruenzsatz sss (Bedingung: Die Summe zweier Seitenlängen ist größer als die dritte Seitenlänge)

1.1 Alle 3 Seiten sind gleich.

Es handelt sich um ein gleichseitiges Dreieck – folglich sind alle Innenwinkel 60° groß.

1.2 Zwei Seiten sind gleich

Beispiel: a = 3, b = 3, c = 2

1. Berechnung des Basiswinkels α im rechtwinkligen Teildreieck ADC:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{c}{2}}{b} = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = 70{,}53°$$

Es folgt β = 70,53° und γ = 180° - 2·70,53° = 38,94°

2. Berechnung des Basiswinkels α mithilfe des Cosinussatzes:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = 70{,}53°.$$

Es folgt β = 70,53° und γ = 180° - 2·70,53° = 38,94°

3. Berechnung des Winkels an der Spitze mithilfe des Cosinussatzes:

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 0{,}778 \Rightarrow \gamma = 38{,}92°$$

Es folgt $\alpha = \frac{180° - 38{,}92°}{2} = 70{,}54°\alpha = 70{,}54°$

1.3 Alle Seiten sind verschieden

Beispiel: a = 3, b = 6, c = 5

1. Berechnung von β mit dem Cosinussatz:

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = -0{,}067 \Rightarrow \beta = 93{,}8°$$

Analog folgt mit Hilfe des Cosinussatzes α = 29,9°
und schließlich γ = 180° - α – β = 56,3°.

2. Berechnung von β mit dem Cosinussatz wie vorstehend, dann Berechnung von α mit dem Sinussatz: $\sin\alpha = \frac{a}{b}\sin\beta \Rightarrow \alpha_1 = 29{,}9°, \alpha_2 = 150{,}1°$

Da der größere Winkel der größeren Seite gegenüberliegen muss, muss α kleiner als β sein. Folglich ist α_1 die Lösung.
Schließlich folgt: $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 56{,}3°$.

3. Berechnung von α mit dem Cosinussatz:
$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 0{,}867 \Rightarrow \alpha = 29{,}9°$$
Berechnung von β mit dem Sinussatz:
$$\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha \Rightarrow \beta_1 = 86{,}2°, \beta_2 = 93{,}8°.$$
Das Kriterium „die größere Seite liegt dem größeren Winkel gegenüber" lässt sich hier nicht anwenden, so dass geprüft werden muss, ob $\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{b}{c}$. Dies ist nur für β_2 der Fall.
Es folgt: $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 56{,}3°$.

2. Kongruenzsatz sws (Bedingung: Der Winkel muss kleiner als 180° sein)
Beispiel: a = 3, b = 6, $\gamma = 40°$

3. Kongruenzsatz wsw (Bedingung: Die Summe der beiden Winkel muss kleiner als 180° sein)
Beispiel: a = 3, $\gamma = 40°$, β = 70°

4. Die restlichen Fälle (Bedingung: Der Winkel muss kleiner als 180° sein)
Beispiel: b = 6, α = 30° (für alle nachfolgenden Fälle)

4.1 Keine Lösung
Beispiel: a = 2

1. Anwendung des Sinussatzes:
$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a} = 1{,}5 \text{ (keine Lösung)}$$

2. Anwendung des Cosinussatzes
$$c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2 - a^2 = 0$$
$$c^2 - 10{,}39c + 32 = 0$$
$$c_{1/2} = 5{,}195 \pm \sqrt{26{,}99 - 32}$$
Die quadratische Gleichung hat keine Lösung

4.2 Eine Lösung (rechtwinkliges Dreieck)
Beispiel: a = 3

1. Anwendung des Sinussatzes:
$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a} = 1 \Rightarrow \beta = 90°$$
Es folgt:
$$\gamma = 60°$$
$$c = \frac{a}{\tan 30°} = 5{,}2$$

c kann auch mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden:
$$c = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 5{,}2$$

2. Anwendung des Cosinussatzes

$$c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2 - a^2 = 0$$

$$c^2 - 10{,}39c + 27 = 0$$

$$c_{1/2} = 5{,}195 \pm \sqrt{26{,}99 - 27}$$

Wegen der Rundungsfehler empfiehlt sich eine exakte Rechnung mit

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Also:

$$c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2 - a^2 = 0$$

$$c^2 - 6\sqrt{3}c + 27 = 0$$

$$c = 3\sqrt{3}$$

β und γ können wie bei 1. berechnet werden.

4.3 Eine Lösung (gleichschenkliges Dreieck)

Beispiel: a = 6

Wegen a = b handelt sich um ein gleichschenkliges Dreieck mit β = 30° und folglich γ = 120°.

1. Berechnung von c mit Hilfe des Sinussatzes:

$$c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha} = 10{,}39$$

2. Berechnung von c mithilfe des Teildreiecks ADC:

$$\frac{c}{2} = b \cdot \cos\alpha = 5{,}2$$

4.4 Eine Lösung nach dem Kongruenzsatz ssW

Beispiel a = 9:

1. Anwendung des Sinussatzes:

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a} = \frac{1}{3} \Rightarrow \beta = 19{,}5° \vee \beta = 160{,}5°$$

Da die größere Seite (a) auch dem größeren Winkel gegenüber liegen muss, ist nur β = 19,5° eine Lösung.

Es folgt: γ = 180° - 30° - 19,5° = 130,5°

und mit Anwendung des Sinussatzes:

$$c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha} = 13{,}7$$

2. Anwendung des Cosinussatzes:

$$c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2 - a^2 = 0$$

$$c^2 - 6\sqrt{3}c - 45 = 0$$

$$c = -3{,}3 \vee c = 13{,}7$$

Es ergibt sich nur eine Lösung: c = 13,7.

Berechnung von β wie unter 1. oder mithilfe des Cosinussatzes:

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = 0{,}94 \Rightarrow \beta = 19{,}4°$$

Es folgt schließlich: γ = 180° - 30° - 19,4° = 130,6°

4.5 Zwei Lösungen

Beispiel a = 5:

1. Anwendung des Sinussatzes:

   $$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a} = 0{,}8 \Rightarrow \beta_1 = 36{,}87°, \beta_2 = 143{,}13°$$

   Beide Lösungen kommen in Betracht, da die größere Seite (b) auch dem größeren Winkel (β) gegenüber liegt.

   Es folgt: γ_1 = 180° - 30° - 36,87° = 113,13 und γ_2 = 180° - 30° - 143,13° = 6,87°.

   und mithilfe des Sinussatzes

   $c_1 = \frac{a\cdot\sin\gamma_1}{\sin\alpha} = 9{,}2$ und $c_2 = \frac{a\cdot\sin\gamma_2}{\sin\alpha} = 1{,}2$

2. Anwendung des Cosinussatzes:

   $$c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2 - a^2 = 0$$

   $$c^2 - 6\sqrt{3}c + 11 = 0$$

   $$c_1 = 9{,}2 \; und \; c_2 = 1{,}2$$

   Es folgen drei Möglichkeiten zur Berechnung der restlichen Größen:

   a) $\cos\beta_1 = \frac{a^2 + c_1{}^2 - b^2}{2ac} = 0{,}8 \Rightarrow \beta_1 = 36{,}87$

   $\cos\beta_2 = \frac{a^2 + c_2{}^2 - b^2}{2ac} = -0{,}8 \Rightarrow \beta_2 = 143{,}13$

   Es folgt:
   γ_1 = 180° - 30° - 36,87° = 113,13 und γ_2 = 180° - 30° - 143,13° = 6,87°.

   b) $\sin\gamma_1 = \frac{c_1\sin\alpha}{a} = 0{,}92 \Rightarrow \gamma_1 = 66{,}9° \vee \gamma_1 = 113{,}1$

   Da c_1 die längste Dreiecksseite ist, muss der gegenüberliegende Winkel der größte Dreieckswinkel sein.
   Dies ist nur für γ_1 = 113,1° und β_1 = 180° - 30° - 66,9° = 83,1° der Fall.
   Für γ_1 = 66,9° wäre β_1 = 180° - 30° - 66,9° = 83,1° fälschlicherweise der größte Winkel.

   $\sin\gamma_2 = \frac{c_2\sin\alpha}{a} = 0{,}12 \Rightarrow \gamma_2 = 6{,}9° \vee \gamma_2 = 173{,}1°$.

   Es kann nur γ_2 = 6,9° und folglich β_2 = 180° - 30° - 6,9° = 143,1° Lösung sein, da sonst die Winkelsumme nicht 180° ergäbe.

   c) $\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a} = 0{,}8 \Rightarrow \beta_1 = 36{,}87° \; und \; \beta_2 = 143{,}13°$

   Es folgt:
   γ_1 = 180° - 30° - 36,87° = 113,13 und γ_2 = 180° - 30° - 143,13° = 6,87°.

   Zu c_1 = 9,2 gehört γ_1 („der größeren Seite liegt der größere Winkel gegenüber“) und folglich gehört zu c_2 = 1,2 der Winkel γ_2.