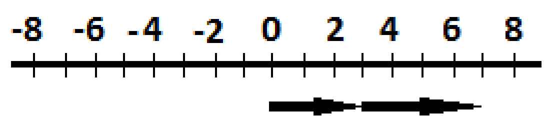
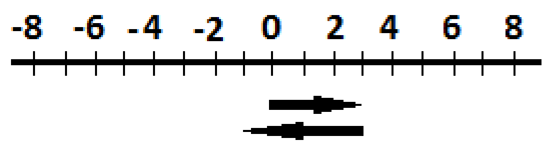
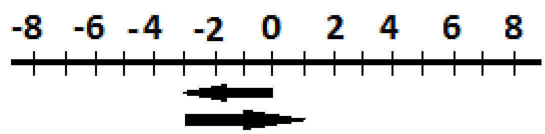
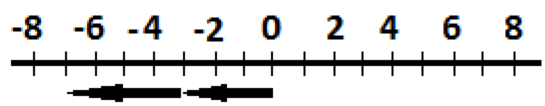
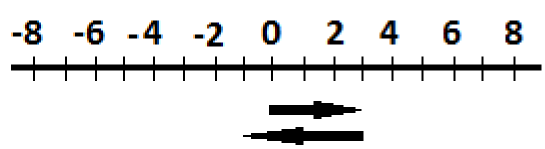
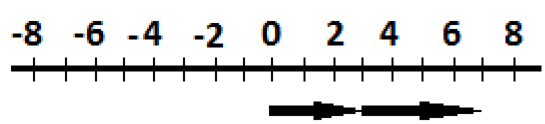
Jürgen Zumdick

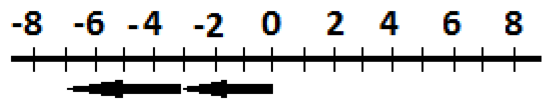
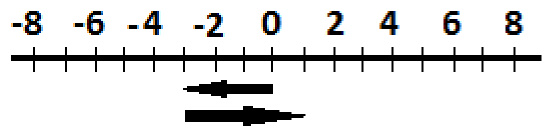
Konzepte zur Einführung der ganzen Zahlen

1. **Anknüpfen an Vorwissen**
   Thermometer, Höhen über/unter dem Meeresspiegel, Kontostände
2. **Einführung der Zahlengerade**
   Abstraktion z.B. des Thermometers zu einer Zahlengeraden, Einführung der Ordnungsrelation, Vereinbarung, dass das positive Vorzeichen weggelassen werden kann
3. **Addition/Subtraktion**
   (Unterschied zwischen Vorzeichen und Rechenzeichen herausarbeiten)
   a) **Das Pfeilmodell**
   Addition bedeutet: An die Spitze des ersten Pfeiles wird der Anfang des zweiten Pfeils gelegt.

Term/Termwert	Pfeildarstellung	Weglassen des positiven Vorzeichens
(+3) + (+4) = +7		3 + 4 = 7
(+3) + (-4) = -1		3 + (-4) = -1
(-3) + (+4) = +1		-3 + 4 = 1
(-3) + (-4) = -7		(-3) + (-4) = -7

Subtraktion bedeutet: An die Spitze des ersten Pfeiles wird der Anfang des zweiten Pfeils gelegt – dann wird der zweite Pfeil umgelegt.

Term/Termwert	Pfeildarstellung nach dem Umlegen	Weglassen des positiven Vorzeichens
(+3) - (+4) = -1		3 - 4 = -1
(+3) - (-4) = +7		3 - (-4) = 7

(-3) - (+4) = -7		-3 - 4 = -7
(-3) - (-4) = +1		(-3) - (-4) = 1

Durch Vergleich der Pfeilbilder erkennt man, dass:

1. (-3) + (-4) = -3 - (+4) = -3 - 4
2. (+3) + (-4) = (+3) - (+4) = 3 – 4
3. (+3) - (-4) = (+3) + (+4) = 3+ 4
4. (-3) - (-4) = -3 + (+4) = -3 + 4

Da diese Beziehungen nicht von den Eigenschaften der verwendeten Zahlen abhängen, spricht man auch von einer beispielgebundenen Beweisführung.
Man kann auch wie folgt argumentieren:
Das Anlegen eines negativen Pfeils entspricht dem Anlegen des entsprechenden positiven Pfeils mit anschließendem Umlegen dieses Pfeiles (Fälle 1 und 2).
Das Anlegen und Umlegen eines negativen Pfeils entspricht dem Anlegen des entsprechenden positiven Pfeils (Fälle 3 und 4).

b) Das Kontomodell

Zunächst sollte geklärt werden, welche grundlegenden Buchungen bei einem Girokonto möglich sind:

Vorgang	Rechenzeichen	Tätigkeit	Vorzeichen
Buchung	+	Einzahlung durch Kontoinhaber	+
	+	Überweisung durch Kontoinhaber veranlasst	-
Rückbuchung (Stornierung)	-	Überweisung auf das Konto	+
	-	Abbuchung vom Konto	-

Der Kontostand wird mit dem +/- Vorzeichen (Haben/Soll) versehen.

Beispiele:

Vorgang	Tätigkeit
(+250) + (+50) = +300	Bei einem Kontostand von 250€ Haben macht der Kontoinhaber eine Einzahlung von 50€
(-250) + (+50) = -200	Bei einem Kontostand von 250€ Soll macht der Kontoinhaber eine Einzahlung von 50€
(+250) + (-50) = +200	Bei einem Kontostand von 250€ Haben macht der Kontoinhaber eine Überweisung von 50€

(-250) + (-50) = -300	Bei einem Kontostand von 250€ Soll macht der Kontoinhaber eine Überweisung von 50€
(+250) - (+50) = +200	Bei einem Kontostand von 250€ Haben storniert die Bank eine Überweisung von 50€
(-250) - (+50) = -200	Bei einem Kontostand von 250€ Soll storniert die Bank eine Überweisung von 50
(+250) - (-50) = +300	Bei einem Kontostand von 250€ Haben storniert die Bank eine Abbuchung von 50€
(-250) - (-50) = -200	Bei einem Kontostand von 250€ Soll storniert die Bank eine Abbuchung von 50€

Es handelt sich bei diesem Modell um ein Operatormodell: Ein Zustand (alter Kontostand) wird durch einen Operator (Kontobewegung) in einen anderen Zustand (neuer Kontostand) überführt.

c) Induktiv-exploratorische Methode

Ausführliche Schreibweise	Kurzschreibweise
(+2) + (+3) = +5	2 + 3 = 5
(+2) + (+2) = +4	2 + 2 = 4
(+2) + (+1) = +3	2 + 1 = 3
(+2) + 0 = +2	2 + 0 = 2
(+2) + (-1) = +1	2 + (-1) = 1
(+2) + (-2) = 0	2 + (-2) = 0
(+2) + (-3) = -1	2 + (-3) = -1
usw.	usw.

Wird der zweite Summand um 1 verkleinert, so verkleinert sich der Summenwert auch um 1.

Ausführliche Schreibweise	Kurzschreibweise
(+5) - (+3) = +2	5 - 3 = 2
(+4) - (+3) = +1	4 - 3 = 1
(+3) - (+3) = 0	3 - 3 = 0
(+2) - (+3) = -1	2 - 3 = -1
(+1) - (+3) = -2	1 - 3 = -2
0 - (+3) = -3	0 - 3 = -3
(-1) - (+3) = -4	-1- 3 = -4
usw.	usw.

Wird der Minuend um 1 verkleinert, so verkleinert sich der Differenzwert auch um 1.

Ausführliche Schreibweise	Kurzschreibweise
(+5) - (+3) = +2	5 - 3 = 2
(+5) - (+2) = +3	5 - 2 = 3
(+5) - (+1) = +4	5 - 1 = 4
(+5) - 0 = +5	5 - 0 = 5
(+5) - (-1) = +6	5 - (-1) = 6

(+5) - (-2) = +7	5 - (-2) = 7
(+5) - (-3) = +8	5 - (-3) = 8
usw.	usw.

Wird der Subtrahend um 1 verkleinert, so vergrößert sich der Differenzwert um 1.

d) Inhaltlich orientierte Modelle

Addition: „kommt hinzu/verändert sich“
Positives Vorzeichen: Guthaben
Negatives Vorzeichen. Schulden

(+50€) + (+70€) = 120€	Zu einem Guthaben von 50€ kommt ein Guthaben von 70€ hinzu.
(+50€) + (-70€) = -20€	Zu einem Guthaben von 50€ kommen Schulden von 70€ hinzu.
(-50€) + (+70€) = 20€	Zu Schulden von 50€ kommt ein Guthaben von 70€ hinzu.
(-50€) + (-70€) = -120€	Zu Schulden von 50€ kommen Schulden von 70€ hinzu.

Subtraktion: Höhenunterschied = größere Höhe – kleinere Höhe

1. Person	2. Person	Höhenunterschied
500m über NN	60m über NN	(+500) – (+60) = 440
500m über NN	60m unter NN	(+500) – (-60) = 560
60m unter NN	80m unter NN	(-60) – (-80) = 20

Was ergibt sich, wenn Minuend und Subtrahend vertauscht werden?
Betrachtet man z.B. die Aufgabe 7 – 5 = 2 und interpretiert dies wie folgt: Gehe auf dem Zahlenstrahl von 7 aus 5 Einheiten nach links, so ergibt sich bei entsprechender Interpretation: 5 – 7 = -2. Ein Vertauschen bedeutet also eine Vorzeichenänderung im Ergebnis. Nach dem Permanenzprinzip erhält man also für den Fall kleinere Höhe – größere Höhe einen negativen Höhenunterschied.

Hinweis:
Ausführliche Schreibweise und Kurzschreibweise sollten anfänglich parallel benutzt werden. Wie beim Modell a) sollten auch in den anderen Modellen die Zusammenhänge zwischen Addition und Subtraktion erarbeitet werden.

4. Regeln zur Addition/Subtraktion

a) Überführung der Langschreibweise in die Kurzschreibweise unter Verwendung formaler Schreibweisen.

Seien a, b zwei nicht negative ganze Zahlen (oder auch Bruchzahlen). Dann gilt:

1. $(+a) + (+b) = a + b$
2. $(+a) + (-b) = a - b$
3. $(-a) + (+b) = -a + b$
4. $(-a) + (-b) = -a - b$
5. $(+a) - (+b) = a - b$
6. $(+a) - (-b) = a + b$
7. $(-a) - (+b) = -a - b$
8. $(-a) - (-b) = -a + b$

Wie man sieht, sind jeweils 2 Fälle identisch (siehe Zusammenhänge bei 3 a)).

b) Additions- und Subtraktionsregeln

Die 4 verschiedenen Fälle unter a) werden nun genauer untersucht:

Term	Beispiel	
a + b	12 + 5 = 17	
a - b, a ≥ b	13 - 9 = 4	Formalisiert
a - b, a ≤ b	6 - 11 = -(11 - 6) = -5	a - b = -(b - a), falls a ≤ b
-a + b, a ≥ b	-14 + 6 = -(14 - 6) = -8	-a + b = -(a - b), falls a ≥ b
-a + b, a ≤ b	-8 + 12 = 12 - 8 = 4	-a + b = b - a, falls a ≤ b
-a - b	-4 - 11 = -(4 + 11) = 15	-a - b = -(a + b)

Verbale Formulierungen bei Verwendung der ausführlichen Schreibweise:
Addition:
Haben die beiden Zahlen gleiches Vorzeichen, so addiert man die Beträge und setzt vor dem Ergebnis das gemeinsame Vorzeichen.
Haben die beiden Zahlen gleiches Vorzeichen, so subtrahiert man den kleineren Betrag von dem Größeren und setzt vor das Ergebnis das Vorzeichen der Zahl mit dem größeren Betrag.
Subtraktion:
Überführe die Subtraktion in eine Addition (siehe 3 a)) und wende obige Additions-regeln an.

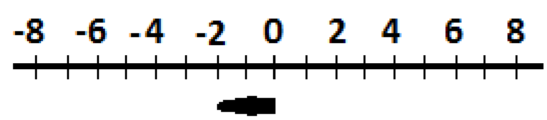
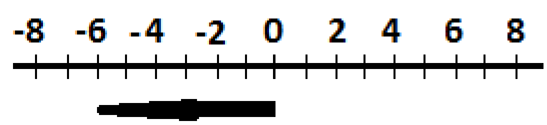
Die vorstehenden Regeln sollten im Unterricht unter den Aspekten sprachliche Förderung und Förderung von Formalisierungsfähigkeiten (Variablengebrauch, Fallunterscheidung) und behandelt werden. Es kann nicht erwartet werden, den Schülern mit diesen Regeln ein nachhaltiges Instrument zum Beherrschen von Addition/Subtraktion ganzer (rationaler) Zahlen an die Hand zu geben.

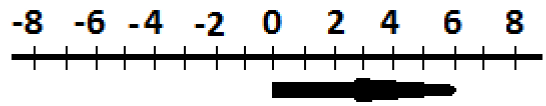
Erfolgversprechender ist es, folgende Strategie den Schülern zu vermitteln:
1. Schreibe einen Term in der verkürzten Schreibweise, indem du zwei gleiche aufeinanderfolgende Zeichen (Rechen-/Vorzeichen) durch das Rechenzeichen „+“ und zwei verschiedene durch das Rechenzeichen „-„ ersetzt.
2. Starte auf der Zahlengeraden bei der ersten Zahl und gehe beim Addieren nach rechts und beim Subtrahieren nach links.
   (Ein Zusatz wie „Die Anzahl der Schritte wird durch die zweite Zahl bestimmt erübrigt sich in der Regel“.)

5. Multiplikation

a) Pfeilmodell

Plausibilitätsbetrachtung: Die Multiplikation mit 3 bedeutet das Strecken eines Pfeiles um den Faktor 3. Die Multiplikation mit -3 bedeutet das Strecken eines Pfeiles mit dem Faktor 3 und anschließender Spiegelung des neuen Pfeiles an 0.

Beispiel	Pfeil
(-2)	
3·(-2)	

(-3)·(-2)	

b) Induktiv-exploratorische Methode

Positiver Multiplikand

Ausführliche Schreibweise	Kurzschreibweise
(+2)·(+3) = +6	2·3 = 6
(+2)·(+2) = +4	2·2 = 4
(+2)·(+1) = +2	2·1 = 2
(+2)·0 = 0	2·0 = 0
(+2)·(-1) = -2	2·(-1) = -2
(+2)·(-2) = -4	2·(-2) = -4
(+2)·(-3) = -6	2·(-3) = -6

Wird der Multiplikator um 1 verringert, so verringert sich der Wert des Produkts um den Multiplikanden.

Negativer Multiplikand

Ausführliche Schreibweise	Kurzschreibweise
(-2)·(+2) = -4	-2·2 = -4
(-2)·(+1) = -2	-2·1 = -2
(-2)·0 = 0	-2·0 = 0
(-2)·(-1) = +2	-2·(-1) = 2
(-2)·(-2) = +4	-2·(-2) = 4
(-2)·(-3) = +6	-2·(-3) = 6
(-2)·(-4) = +8	-2·(-4) = 8

Wird der Multiplikator um 1 verringert, so erhöht sich der Wert des Produkts um den Betrag des Multiplikanden.

c) Anwendung des Permanenzprinzips

Multiplikation als fortgesetzte Addition: 3·(-5) = (-5) + (-5) + (-5) = (-15) = -(3·5)
(-5)·3 = 3·(-5) (Forderung der Gültigkeit des Kommutativgesetzes)
(-5)·(-3)=(-5)·[0 - 3] = (-5)·0 - (-5)·3 = 0 - (-15) = 15 (Forderung der Gültigkeit des Distributivgesetzes)

6. Division

Es empfiehlt sich, kein neues Modell heranzuziehen, sondern das Prinzip der Umkehraufgabe (Probe) anzuwenden:
(-6):(-3) = 2, weil 2·(-3) = -6

7. Regeln zur Multiplikation/Division

a) Verbal

Man multipliziert/ dividiert zwei Zahlen, indem man die Beträge multipliziert/dividiert und dem Ergebnis ein negatives Vorzeichen gibt, falls die beiden Zahlen unterschiedliches Vorzeichen haben.

b) Formal

a·b = |a|·|b|, falls a und b gleiches Vorzeichen haben
a·b = -|a|·|b|, falls a und b verschiedenes Vorzeichen haben
a:b = |a|:|b|, falls a und b gleiches Vorzeichen haben und b ≠ 0
a:b = -|a|:|b|, falls a und b verschiedenes Vorzeichen haben und b ≠ 0

8. Abschließende Betrachtung zu den Regeln

Es ist wichtig, dass die Schüler vor allem in der Anfangsphase Modelle zur Verfügung haben, mit denen sie die richtigen Strategien entwickeln können.
Beispiel: (-15)+(+12).
„Zu 15€ Schulden kommen 12€ Guthaben hinzu“ oder „gehe auf dem Zahlenstrahl von -15 aus 12 Einheiten nach rechts“.
In einer späteren Phase, wenn die Rechnungen gut beherrscht werden, lösen sich viele Schüler von diesen Modellvorstellungen. Dann kann man sie befragen, nach welcher Strategie sie beim Rechnen vorgehen. Die meisten antworten dann etwa wie folgt: Ich betrachte die Zahl ohne Vorzeichen, nehme die größere (hier 15) und subtrahiere (hier 12). Ähnliche Formulierungen gibt es für die anderen Fälle. Jetzt könnte man eine fachlich exakte Formulierung mit Beträgen anstreben. Diese Formulierung hat aber weniger den Sinn, Fähigkeiten im Bereich der Rechnungen mit rationalen Zahlen zu festigen, als vielmehr den Sinn, den Gebrauch der Fachsprache und das Formalisieren einzuüben (in späteren Jahrgangsstufen wird deutlich, dass es auf diesem Gebiet doch erhebliche Defizite gibt).
Was die Frage nach der Trennung von Addition und Subtraktion betrifft, so ist eine Diskussion darüber zweitrangig. Man kann zunächst trennen, wird dann aber schnell diese Trennung aufheben, wenn man mit einem geeigneten Modell gezeigt hat, dass die Subtraktion einer Zahl durch die Addition mit ihrer Gegenzahl ersetzt werden kann.
Auch die oft umstrittenen Formulierungen wie „minus·minus ergibt plus“ sollte man durchaus zulassen.

9. Exkurs zur Zahl 0

Von Christoph Drösser
„Was sind die bedeutendsten Erfindungen der Menschheit? Das Feuer. Das Rad. Die Atombombe. Die Null.
Die Null eine Erfindung? Ja, und sogar eine recht junge. Eigentlich gibt es sogar zwei Nullen: die Zahl Null, die den Saldo eines leeren Geldbeutels beschreibt, und die Ziffer Null, die an jeder Stelle einer Zahl etwas anderes bedeutet. Historisch kam erstaunlicherweise erst die Ziffer, dann die Zahl.
Die Babylonier hatten schon 2000 Jahre vor unserer Zeitrechnung eine Stellenschreibweise für Zahlen, und wenn eine Stelle unbesetzt war, ließen sie eine kleine Lücke. Irgendwann war jemand die Verwechslungen leid und erfand ein "Füllzeichen" - die Ziffer Null war geboren.
Die erste Null, die das Nichts bezeichnet, finden wir in einem ägyptischen Tempel aus dem 2. Jahrhundert v.Chr. Da meißelte ein unbekannter Rechner eine Faustregel in die Wand, mit der sich die Fläche von Vierecken berechnen ließ. Die Formel galt auch für Dreiecke, wenn man einfach eine Seite gleich Null setzte, also quasi zusammenschnurren ließ. Die entsprechende Hieroglyphe, ist das älteste bekannte Zeugnis für die Zahl Null.
Aber beide Nullen verschwanden mit dem Untergang der Zivilisation, die sie hervorgebracht hatte. Jahrhundertelang war die abendländische Zivilisation auf die römischen Ziffern angewiesen, mit denen man weder anständig addieren noch multiplizieren konnte. Erst durch die Araber und die nach ihnen benannten Ziffern (al-sifr war der Name für die Null) wurden Zahlen wieder zu einem vernünftigen Werkzeug. Dem mittelalterlichen Geist war die Null unheimlich: In Florenz wurden sie verboten, weil sie so leicht zu fälschen waren - durch Anhängen einer Null konnte ein Halunke jede Geld-

summe verzehnfachen. Erst im Jahr 1438 wurde auf einer deutschen Münze erstmals die Jahreszahl in arabischen Ziffern geprägt.
Dann aber gab es kein Halten mehr. Naturwissenschaft und Technik verlangten nach einem Zahlensystem, das jede beliebige Größe ausdrücken kann. Ob das der Durchmesser des Atomkerns ist (0,000000000023 Millimeter) oder die Entfernung des nächsten Sterns (um die 30.000.000.000 Kilometer).
Ihren größten Siegeszug feierte die Null mit der Erfindung des Computers. Dessen Schaltkreise kommen mit zwei Symbolen aus, um alle Rechnungen dieser Welt durchzuführen: mit der Null und ihrem allgegenwärtigen Gegenpart, der Eins. Auch die hatte einen langen Weg zu gehen, bis sie endlich als richtige Zahl anerkannt wurde. Aber das ist eine andere Geschichte.“