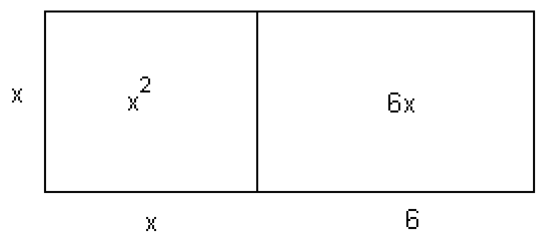
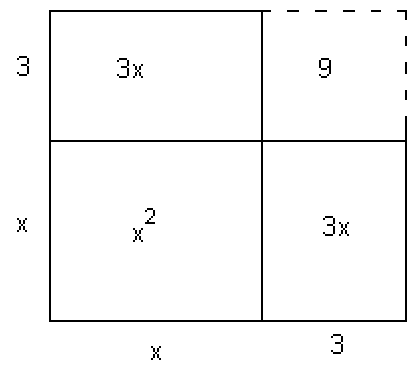
Herleitung der Cardanischen Formel zur Lösung einer kubischen Gleichung und ein Ausblick auf die komplexen Zahlen

Jürgen Zumdick

1. Der Nährboden für die grundlegende Idee

Es wird zunächst eine quadratische Gleichung betrachtet, z. B. $x^2 + 6x = 40$. Der linke Term soll geometrisch dargestellt werden:

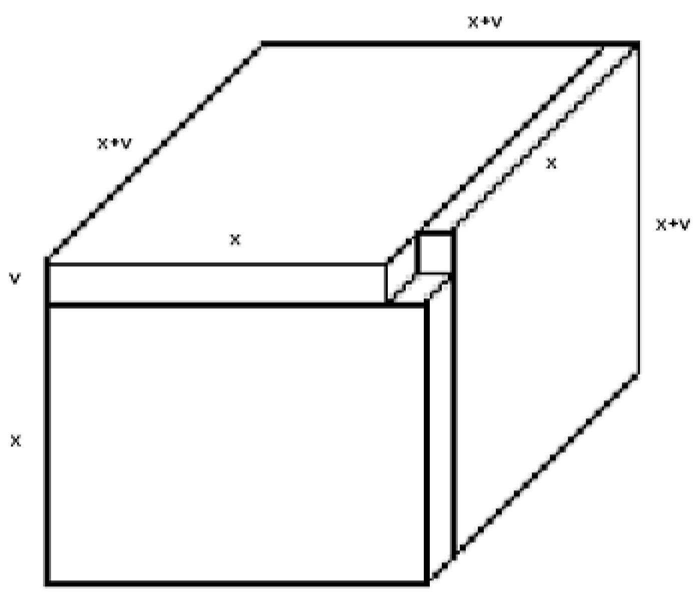




Die 2. Möglichkeit ist Erfolg versprechender, da die Figur leicht zu einem Quadrat ergänzt werden kann.
Wegen $x^2 + 6x = 40$ beträgt der Flächeninhalt des großen Quadrats 49 und somit dessen Seitenlänge 7. Also gilt $x+3 = 7$ und somit $x = 4$.
Geht man auf die algebraische Ebene über, so folgt auch noch $x+3 = -7$ und somit als 2. Lösung $x = -10$. Als Verallgemeinerung ergibt sich die bekannte p-q-Formel.

2. Der Übergang vom Quadrat zum Würfel und die Herleitung der Formel

Wir betrachten nun eine entsprechende kubische Gleichung, z. B. $x^3 + 6x = 20$. Anstatt wie bei der quadratischen Gleichung an ein Quadrat zwei Rechtecke anzugliedern, um die Figur dann mithilfe eines weiteren Quadrats zu einem größeren Quadrat zu ergänzen, sollten nun an einen Würfel drei Quader gepackt werden, so dass die Gesamtfigur mithilfe eines weiteren Würfels zu einem größeren Würfel ergänzt werden kann.



An der Vorderseite ist oben rechts ein Würfel mit dem Volumen v^3 ausgespart. Im Inneren des Körpers befindet sich ein Würfel mit dem Volumen x^3. An diesen Würfel sind drei Quader mit denselben Maßen angefügt. Damit die drei Quader den Term 6x darstellen, muss gelten $3 \cdot x \cdot v \cdot (x+v) = 6x$, also $v(x+v) = 2$ bzw. $v = \frac{2}{x+v}$. Es entsteht ein großer Würfel mit der Kantenlänge $u = x+v$, aus dem der kleine Würfel mit der Kantenlänge v ausgespart wurde. Also gilt $u^3 - v^3 = x^3 + 6x = 20$.

Wegen $v = \frac{2}{x+v} = \frac{2}{u}$ folgt nun $u^3 - \left(\frac{2}{u}\right)^3 = 20$ bzw. $u^6 - 20u^3 - 8 = 0$. Mit $z = u^3$ erhält man eine quadratische Gleichung mit der Lösung $z = 10 + \sqrt{108}$ (Die negative Lösung galt zur Zeiten Cardanos als sinnlos). Es folgt $u = \sqrt[3]{10+\sqrt{108}}$.

Ersetzt man in der Gleichung $u^3 - v^3 = 20$ u durch $\frac{2}{v}$, so erhält man analog $v = \sqrt[3]{-10+\sqrt{108}}$ und somit insgesamt:

$x = u - v = \sqrt[3]{10+\sqrt{108}} - \sqrt[3]{-10+\sqrt{108}}$. Der Taschenrechner liefert x = 2.

Betrachtet man nun die Gleichung $x^3 + px + q = 0$, so lassen sich vorstehende Überlegungen verallgemeinern und man erhält die Cardanische Formel:

$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{d}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{d}}$, wobei $d = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$. (Für den Fall $\sqrt[3]{a}$ mit negativem a ist der Term $-\sqrt[3]{-a}$ zu verwenden.)

Hinweis: Falls $d > 0$, so hat die kubische Gleichung nur eine reelle Lösung, die anderen beiden sind komplex. Falls $d = 0$, so existieren drei reelle Lösungen, von denen mindestens zwei gleich sind. Ist $d < 0$, so erhält man drei reelle Lösungen, die i. A. aber nicht durch reelle Radikale darstellbar sind. Dieser Fall soll weiter unten untersucht werden.

3. Die allgemeine kubische Gleichung

Die allgemeine kubische Gleichung lautet: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Obige Formel ist jedoch nur anwendbar, wenn das quadratische Glied fehlt und der Vorfaktor von x^3 den Wert 1 hat. Dividiert man die Gleichung zunächst durch a, so erhält man $x^3 + ex^2 + fx + g = 0$. Damit das quadratische Glied entfällt, muss eine Substitution durchgeführt werden. Die binomische Formel

$(x-y)^3 = 3x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ liefert die Idee für die Substitution: $x = z - \frac{e}{3}$. Es folgt nun:

$$\left(z-\frac{e}{3}\right)^3 + e\left(z-\frac{e}{3}\right)^2 + f\left(z-\frac{e}{3}\right) + g = 0 \Leftrightarrow z^3 - z^2e + z\cdot\frac{e^2}{3} - \frac{e^3}{27} + ez^2 - \frac{2z\cdot e^2}{3} + \frac{e^3}{9} + fz - \frac{ef}{3} + g = 0 \Leftrightarrow$$

$$z^3 + \left(f - \frac{e^2}{3}\right)\cdot z = -\frac{2e^3}{27} + \frac{ef}{3} - g$$

Somit hat man eine reduzierte kubische Gleichung erhalten, von der man mithilfe der Cardanischen Formel eine reelle Lösung bestimmen kann.

4. Ausblick auf die komplexen Zahlen

Betrachtet man die Gleichung $x^3 - 6x - 4 = 0$, so liefert Probieren die Lösung $x = -2$. Die Polynomdivision führt auf $(x^3 - 6x - 4):(x + 2) = x^2 - 2x - 2$.

Die quadratische Gleichung $x^2 - 2x - 2 = 0$ hat die Lösungen $x = 1 \pm \sqrt{3}$.

Die Anwendung der Cardanischen Formel liefert:

$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-4}} - \sqrt[3]{-2+\sqrt{-4}} = \sqrt[3]{2+2i} - \sqrt[3]{-2+2i}$ mit $i = \sqrt{-1}$. Dieser Ausdruck muss eine der obigen reellen Lösungen sein. Um die Kubikwurzel in die Normaldarstellung einer komplexen Zahl zu überführen, wird folgender Ansatz gemacht:

$\sqrt[3]{2+2i} = z + i \Leftrightarrow 2+2i = z^3 - 3z + i(3z^2 - 1)$

Ein Koeffizientenvergleich liefert $3z^2 - 1 = 2$ und $z^3 - 3z = 2$. Das System hat die Lösung z = -1. Also gilt $\sqrt[3]{2+2i} = -1+i$.

Analog zeigt man, dass $\sqrt[3]{-2+2i} = 1+i$.

Es folgt x = -1 + i - (1 + i) = -2.

Ein weiteres Beispiel ist $x^3 - 51x - 104 = 0$, welches mit demselben Verfahren auf die Lösung x = 8 führt.

Das Beispiel $x^3 - 63x - 162 = 0$ zeigt, dass das Verfahren an seine Grenzen stößt. Allgemeingültige Verfahren überschreiten jedoch die Möglichkeiten der Schulmathematik (Stichwort: Satz von Moivre).

5. Historisches (Quelle unbekannt)

Das Leben Cardanos

Geronimo Cardano wurde am 24. 09. 1501 als uneheliches Kind in Pavia geboren. Man hatte mehrfach vergeblich versucht, das Kind abzutreiben, der Grund dafür, weshalb Gironimo einen Schaden davontrug. Geronimo war ein schwächliches Kind, erkrankte mehrmals schwer - er galt als physisch und psychisch labil- und war bis zu seinem 30. Lebensjahr impotent.

Sein Vater war ein alter und etwas sonderbarer Advokat, der in Mailand lebte und eine Verbindung mit einer viel jüngeren Witwe eingegangen war. Die Eltern lebten anfangs getrennt in Mailand, Geronimo wurde zunächst auf dem Lande aufgezogen. Obwohl sein Vater ihn ziemlich tyrannisch behandelte und oft schlug, liebte und verehrte Geronimo seinen Vater sein Leben lang. 1520 begann Geronimo zur Enttäuschung seines Vaters, der seinen Sohn gerne als Rechtsanwalt gesehen hätte, ein Studium der Medizin und Mathematik an der Universität in Pavia.

(Dieses Studium schien ihm, wie er sagte, *„reiner und ehrlicher, da es auf der Vernunft, dem ewigen Gesetz der Natur beruht und nicht, wie die Jurisprudenz, auf den vorübergehenden Meinungen der Menschen. ")*

1526 schloss er an der Universität in Padua sein Medizinstudium mit dem Doktorgrad ab.

Cardano erhielt jedoch wegen seiner unehelichen Herkunft keine Erlaubnis, als Arzt in Mailand zu praktizieren: man wies ihn als illegitim geboren ab. Statt dessen praktizierte er als Arzt auf dem Land, oft in bitterer Armut lebend. Seine Sorgen vertrieb er sich, indem er seiner Spielleidenschaft nachging. Doch auch hier blieb sein forschender Geist wach: Seine Erfahrungen beim Spiel führten ihn zur Entdeckung eines Grundgesetzes der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Cardano wurde soweit gesund, dass er 1531 Lucia Bandarini heiraten konnte. Nach einigen Fehlgeburten gebar ihm seine Frau zwei Söhne und eine Tochter.

Cardano begann Vorlesungen über populäre Wissenschaften zu halten und schrieb mehrere erfolgreiche Abhandlungen über die verschiedensten Gebiete, angefangen von der Medizin über die Religion bis hin zur Mathematik.

1534 gelang es ihm, ins Kollegium der Mailänder Ärzte aufgenommen zu werden. Bis zur Mitte des Jahrhunderts war Cardano der bekannteste, erfolgreichste und meist gerufene Arzt in Europa (Leibarzt des Papstes; Heilung des Erzbischofs von St. Andrew's, Schottland).

1545 wurde sein Buch über Algebra, die *„Ars Magna",* in Nürnberg gedruckt, das ihn wirklich berühmt machte. (Auf diese Schrift kommen wir später genauer zu sprechen, weil in ihr die Lösungsformel für Gleichungen 3. Grades beschrieben wird, um die es in diesen Stunden gehen soll.)

1556 heiratete Cardanos ältester Sohn Giambattista (inzwischen Arzt in Mailand) trotz heftigstem Widerstandes seines Vaters. Seine Frau bekam drei Kinder, von keinem jedoch war Giambattista der Vater. Er vergiftete seine untreue Frau und wurde wegen Mordes verhaftet. Cardano übernahm die Verteidigung seines Sohnes, jedoch erfolglos: 1560 wurde Giambattista hingerichtet. Auch

Cardanos jüngerer Sohn landete wegen einiger Verbrechen wiederholt im Gefängnis. 1562 wurde Cardano*als Medizinprofessor nach Bologna berufen.
1570 wurde Cardano der Häresie angeklagt und verhaftet, sein Bekanntheitsgrad, einflussreiche Freunde und gute Führung sorgten jedoch dafür, dass er schnell wieder freigelassen wurde. Ihm wurde jedoch ein Publikationsverbot auferlegt.
Auf Befehl des Papstes nahmen ihn die römischen Ärzte in ihr Kollegium auf, und der Papst gewährte ihm überdies noch eine Pension. Am 20.09.1576 starb Cardano in Rom.

Die Geschichte der Gleichung dritten Grades
1494 behauptete der Franziskaner Luca Pacioli: ***Gleichungen 3. Grades sind unlösbar!***
Um 1500 entdeckte Scipio del Ferro die Lösungsformel für $x^3+mx=n$, die jedoch aus Wettbewerbsgründen geheim gehalten wurde. Scipio gab diese Formel auf dem Totenbett an seinen Schüler Antonio Fior weiter, der 1535 Niccolo Fontana (genannt „Tartaglia[4]', der Stotterer) zum Wettstreit herausforderte. Dieser entdeckte ebenfalls die Lösungsformel und verriet sie Cardano unter der Bedingung, daß dieser sie nicht publiziere.
Ein Schüler Cardanos entdeckte 1540 die Lösungsformel für Gleichungen 4. Grades.
Als Cardano und sein Schüler feststellten, daß die Lösungsformel nicht von Tartaglia selbst stammte, sondern Scipio del Ferro die Regel schon vor 30 Jahren besessen hatte, fand Cardano sich nicht mehr an seinen Schwur gebunden, da dieser auf irrtümlichen Voraussetzungen beruhte. 1545 veröffentlichte er diese Lösungsformel in seinem Werk *„Ars Magna ".*