Problemlösestrategien am Beispiel einer komplexen „Textaufgabe“

Jürgen Zumdick

Mathematische Inhalte: Quadratische Ungleichungen, Textanalyse, diverse Problemlösestrategien

Problem (Problemquelle unbekannt):
„Uns brummt ganz schön der Kopf“, stöhnte Lady Honey beim jährlichen Honigklatsch mit ihren Kolleginnen, den Bienenköniginnen. „Wir mussten in den letzten neun Tagen Tausende von Waben bauen, genauer gesagt“ – sie kramte ein beschriebenes Blütenblatt aus ihrer Flügeltasche – „69489 Stück. Nach jedem Tag musste ich sechs zusätzliche Arbeiterinnen zum Bau abstellen, zumal jede nach jedem Tag fünf Waben weniger baute als tags zuvor. Gegen Ende sank trotz der zusätzlichen Arbeiterinnen sogar die tägliche Wabenzahl“, rüsselte sie empört. An welchem Tag wurden die meisten Waben gebaut, und wieviel waren es?

1. **Was ist gesucht? Welche Informationen sind gegeben?**
   Gesucht:
   1. Gesucht ist der Tag, an dem die meisten Waben gebaut wurden.
   2. Gesucht ist die Anzahl der Waben, die an diesem Tag gebaut wurden.

   Gegeben:
   1. 9 Arbeitstage
   2. Gesamtzahl der gebauten Waben: 69489
   3. Ab dem zweiten Tag kommen täglich 6 neue Arbeiterinnen hinzu.
   4. Jede Arbeiterin baut ab dem zweiten Tag 5 Waben weniger als am vorhergehenden Tag.
   5. Am Ende sinkt die täglich gebaute Wabenzahl.

2. **Planung eines ersten Lösungsversuchs**
   Die vorgegebenen Daten legen nahe, für jeden Tag die Anzahl der gebauten Waben zu ermitteln. Hierfür müssen Variablen eingeführt werden, um die entsprechenden Terme aufstellen zu können.
   Es sei a die Anzahl der Arbeiterinnen am ersten Tag und w die Anzahl der Waben, die eine Arbeiterin am ersten Tag ihres Einsatzes baut.
   Am ersten Tag werden somit insgesamt **$a \cdot w$** Waben gebaut.
   Am zweiten Tag bauen diese Arbeiterinnen $a \cdot (w - 5)$ Waben. (4. Information bei „Gegeben“). Da 6 Arbeiterinnen hinzukommen (3. Information bei „Gegeben“), bauen dies $6 \cdot w$ Waben. Somit werden am zweiten Tag **$a \cdot (w - 5) + 6 \cdot w$** Waben gebaut.
   Am dritten Tag bauen die Arbeiterinnen, die seit dem ersten Tag im Einsatz sind, nur noch $a \cdot (w - 2 \cdot 5)$ Waben, die Arbeiterinnen, die seit dem zweiten Tag im Einsatz sind, $6 \cdot (w-5)$ Waben und die Arbeiterinnen, die hinzukommen $6 \cdot w$ Waben. Die Gesamtzahl der Waben des 3. Tages beträgt also: **$a \cdot (w - 2 \cdot 5) + 6 \cdot (w - 5) + 6 \cdot w$.**
   Die folgende Tabelle zeigt die gesamte Entwicklung bis zum 9. Tag (1. Information von „Gegeben“).

Tag	Anzahl der Waben
1	$a \cdot w$
2	$a \cdot (w - 5) + 6 \cdot w$

3	a·(w – 2·5) + 6·(w – 5) + 6·w = a·(w – 2·5) + 6·(2·w – 5)
4	a·(w – 3·5) + 6·(w – 2·5) + 6·(w – 5) + 6·w = a·(w – 3·5) + 6·(3·w – 3·5)
5	a·(w – 4·5) + 6·(w – 3·5) + 6·(w – 2· 5) + 6·(w – 5) + 6·w = a·(w – 4·5) + 6·(4·w – 6·5)
6	a·(w – 5·5) + 6·(w – 4·5) + 6·(w – 3· 5) + 6·(w – 2·5) + 6·(w – 5) + 6·w = a·(w – 5·5) + 6·(5·w – 10·5)
7	a·(w – 6·5) + 6·(6·w – 15·5)
8	a·(w – 7·5) + 6·(7·w – 21·5)
9	a·(w – 8·5) + 6·(8·w – 28·5)

Tabelle 1

Die Gesamtzahl der gebauten Waben beträgt somit:

9·a·w – a·(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8)·5 + 6·[(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8)·w – (1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28)·5] =

9·a·w – a·36·5 + 6·[36·w – 84·5] =

9·a·w – 180·a + 216·w – 2520 = 69489 (2. Information von Gegeben)

Vereinfacht zu:

a·w – 20·a + 24·w = 8001 (*)

3. Das Problem lässt sich noch nicht lösen. Gibt es Hilfssätze aus dem mathematischen Umfeld? Wurden alle Informationen benutzt?

Die erhaltene Gleichung lässt sich noch nicht lösen, da sie 2 Variablen enthält. Eventuell hilft ein System mit zwei Gleichungen weiter. Da die 5. Information bei „Gegeben“ noch nicht benutzt wurde, wird diese nun näher untersucht. Die Aussage kann dahin gehend interpretiert werden, dass die Produktion am 9.Tag geringer war als am 8.Tag. Dies bedeutet:

a·(w – 8·5) + 6·(8·w – 28·5) < a·(w – 7·5) + 6·(7·w – 21·5) ⇔

a·w - 40·a + 48·w – 840 < a·w - 35·a + 42·w – 630 ⇔

6·w < 5·a + 210⇔

$$w < \frac{5}{6}\cdot a + 35$$

Ersetz man in der Gleichung (*), welche die Gesamtzahl der Waben angibt, w durch den größeren Term $\frac{5}{6}\cdot a + 35$, so erhält man:

$$a\cdot\left(\frac{5}{6}\cdot a + 35\right) - 20\cdot a + 24\cdot\left(\frac{5}{6}\cdot a + 35\right) > 8001.$$

Dies ist eine quadratische Ungleichung, die wie folgt gelöst wird:

$$a\cdot\left(\frac{5}{6}\cdot a + 35\right) - 20\cdot a + 24\cdot\left(\frac{5}{6}\cdot a + 35\right) > 8001 \Leftrightarrow$$

$$\frac{5}{6}\cdot a^2 + 35\cdot a - 20\cdot a + 20\cdot a + 840 > 8001 \Leftrightarrow$$

$$a^2 + 42\cdot a > 8593{,}2 \Leftrightarrow$$

$$(a + 21)^2 > 9034{,}2 \Leftrightarrow$$

$$a + 21 > \sqrt{9034{,}2} \vee a + 21 < -\sqrt{9034{,}2}$$

Da a eine natürliche Zahl ist, folgt: a ≥ 75.

4. **Reflexion über den Lösungsweg, wenn das Problem immer noch nicht gelöst ist.**
Die Überprüfung des Lösungsweges zeigt keinen Fehler auf. Als Ausweg bietet es sich an, mit den bisher erhaltenen Ergebnissen und der **Probiermethode** zu arbeiten.
Dazu bestimmt man in der Gleichung (*) a·w – 20·a + 24·w = 8001 für a ≥ 75 das jeweilige w und prüft, ob w eine natürliche Zahl ist.

$$a \cdot w - 20 \cdot a + 24 \cdot w = 8001 \Leftrightarrow w = \frac{8001 + 20a}{a + 24}$$

a	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85
w	95,97	95,21	94,47	93,74	93,02	92,32	91,63	90,95	90,29	89,64	89

Tabelle 2

Eine Lösung ist also a = 85 und w = 89. Es stellt sich die Frage, wie weit die Tabelle fortgesetzt werden muss, um weitere Lösungen auszuschließen. Die Textaussage, dass gegen Ende die tägliche Wabenzahl sank, lässt den Schluss zu, dass am Anfang die tägliche Wabenzahl stieg. Das bedeutet: a·w < a·(w – 5) + 6·w ⇔ $w > \frac{5}{6} \cdot a$.

Ersetzt man nun in der Gleichung (*) w durch den kleineren Term $\frac{5}{6} \cdot a$, so erhält man die Ungleichung:

$$a \cdot \left(\frac{5}{6} \cdot a\right) - 20 \cdot a + 24 \cdot \left(\frac{5}{6} \cdot a\right) < 8001 \Leftrightarrow$$

$$\frac{5}{6} \cdot a^2 < 8001 \Leftrightarrow$$

$$-\sqrt{9601{,}2} < a < \sqrt{9601{,}2}$$

Für die natürliche Zahl a gilt: a ≤ 97.
Die Tabelle wird also fortgesetzt:

a	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95
w	88,37	87,76	87,15	86,56	85,97	85,40	84,84	84,28	83,74	83,20
A	96	97								
w	82,68	82,16								

Tabelle 3

5. **Endgültige Beantwortung der gestellten Frage**
Man weiß nun, dass am ersten Tag 85 Arbeiterinnen eingesetzt wurden und dass jede Arbeiterin am ersten Tag ihres Einsatzes 89 Waben baute. Um die gestellte Frage zu beantworten, muss die Tabelle 1 mit den gefundenen Werten für a und w ausgefüllt werden:

Tag	Anzahl der Waben
1	7565
2	7674
3	7753
4	7802
5	7821
6	7810
7	7769

8	7698
9	7597
Summe	69489

Also wurden am 5.Tag die meisten Waben gebaut, und zwar 7821.