Die Mathematik der Tonleiter

Jürgen Zumdick

1. Verhältnisse in der diatonischen/temperierten Tonleiter

Wir betrachten eine Saite von 120 cm Länge. Wird sie in Schwingungen versetzt, so erzeugt sie einen Ton. Dessen Frequenz sei 360 Hertz. Verkürzt man die Saite um die Hälfte, so kann man mit der verkürzten Saite einen Ton erzeugen, der eine Oktav höher liegt und eine doppelt so hohe Frequenz hat. Es ergibt sich also folgender Zusammenhang:

Name	Verhältnis der Länge der schwingenden Saite zur Grundlänge (120)	Länge der schwingenden Saite	Frequenz der schwingenden Saite
Prime	120:120 = 1:1	120	360
Oktave	60:120 = 1:2	60	720

Dazwischenliegende Töne werden (in der diatonischen Stimmung) über die folgenden Verhältnisse definiert:

Ganzton	Verhältnis der Länge der schwingenden Saite zur Grundlänge (120)	Länge der schwingenden Saite	Frequenz der schwingenden Saite
Prime	1:1	120	360
Sekunde	8:9		
(große) Terz	4:5		
Quarte	3:4		
Quinte	2:3		
(große) Sexte	3:5		
(große) Septime	8:15		
Oktave	1:2	60	720

Fülle die obige Ganzton-Tabelle aus.

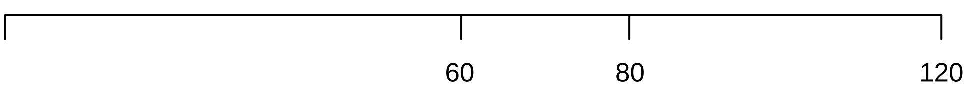
Ergebnis:

Name	Verhältnis der Länge der schwingenden Saite zur Grundlänge (120)	Länge der schwingenden Saite	Frequenz der schwingenden Saite
Prime	1:1	120	360
Sekunde	8:9	$106 \frac{2}{3}$	405
(große) Terz	4:5	96	450
Quarte	3:4	90	480
Quinte	2:3	80	540
(große) Sexte	3:5	72	600
(große) Septime	8:15	64	675
Oktave	1:2	60	720

Wählt man zunächst die Quinte und dann im schwingenden Teil die Quarte, so erhält man:

$\frac{2}{3}$ von 120 = 80; $\frac{3}{4}$ von 80 = 60

Saite:



Damit ist man eine Oktave höher. Analoge Rechnung (mit den Verhältnissen): $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

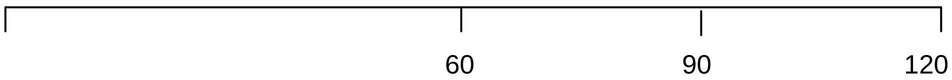
(Quarte von der Quinte ergibt eine Oktave – analog: Quinte von der Quarte).

Hierzu gibt es 2 Umkehraufgaben: $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$ und $\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3}$

Die erste Aufgabe sei näher untersucht:

Man wählt zunächst die Oktave: $\frac{1}{2}$ von 120 = 60; Da $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}$ bedeutet dies eine Verlängerung der schwingenden Saite um $\frac{3}{2}$, also: $\frac{3}{2} \cdot 60 = 90$

Saite:



$\frac{90}{120} = \frac{3}{4}$; somit hat man die Quarte erhalten.

Folgende Verhältnisse (Halbtöne) kommen nun noch hinzu: 24:25; 5:6; 18:25; 5:8; 5:9. Ordne diese Verhältnisse in die obige Tabelle ein.

Ergebnis:

	Verhältnis	Verhältnis dezimal	Tonleiter bei Ausgangston c
Prime	1:1	1	c
übermäßige Prime	24:25	0,96	cis/des
Sekunde	8:9	0,8889	d
kleine Terz	5:6	0,8333	dis/es
große Terz	4:5	0,8	e
Quarte	3:4	0,75	f
Tritonus	18:25	0,72	fis/ges
Quinte	2:3	0,6667	g
kleine Sexte	5:8	0,625	gis/as
große Sexte	3:5	0,6	a
kleine Septime	5:9	0,5556	ais/b
große Septime	8:15	0,5333	h
Oktave	1:2	0,5	c^2

Wie erklärt sich die Unterteilung in 12 Tonintervalle?
Eine gewisse Anzahl von Quintensprüngen (n) sollte einer gewissen Anzahl von Oktavsprüngen (m) entsprechen. Zur Untersuchung müssen folgende Tabellen aufgestellt werden:

Quintensprünge	Verhältnis	Oktavsprünge	Verhältnis
2	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 0{,}444\,4$	2	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0{,}25$
3	$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = 0{,}296\,3$	3	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0{,}125$
4	0,1975	4	0,0625
5	0,1317	5	0,0313
6	0,0878	6	0,0156
7	0,0585	7	0,0078
8	0,0390		
9	0,0260		
10	0,0173		

11	0,0116		
12	0,0077		

Eine gute Näherung ergibt sich für n = 12 und m = 7. Der dabei auftretende Fehler wird auch das pythagoräische Komma genannt. Die Zahl 12 ist nun für die Einteilung in 12 Intervalle verantwortlich.

Der genaue Zusammenhang wird jedoch erst deutlich, wenn man zu einer temperierten Tonleiter übergeht, in welcher der obige Fehler nicht auftritt und alle Verhältnisse durch Multiplikation mit dem gleichen Faktor auseinander hervorgehen.

Ansatz A

Gesucht sind m und n, mit: $\left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^m \Leftrightarrow 2^{n+m} = 3^m \Leftrightarrow \frac{n+m}{n} = \frac{\lg 3}{\lg 2}$

Als Näherung ergibt sich $\frac{n+m}{m} = \frac{4771}{3010}$

Eine Kettenbruchentwicklung liefert:

$$\frac{4771}{3010} = 1+\frac{1761}{3010} = 1+\frac{1}{\frac{3010}{1761}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1249}{1761}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{1761}{1249}}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{512}{1249}}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{1249}{512}}}}$$

$$= 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{225}{512}}}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{512}{225}}}}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{62}{225}}}}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{225}{62}}}}}}$$

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{39}{62}}}}}}$$

Die einzelnen Stufen der Entwicklung liefern:

1	=1
$1+\frac{1}{1}$	=2
$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}$	$=\frac{3}{2}$
$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}$	$=\frac{8}{5}$

$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}$	$=\frac{19}{12}$
$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}}}}$	$=\frac{65}{41}$

In der 5. Näherungsstufe gilt: $\frac{4771}{3010} \approx \frac{19}{12}$

Es folgt n = 12 und m = 7.

Die 4. Näherungsstufe böte nur 5 Unterteilungen in der Oktave, die 6. Näherungsstufe hätte unhandlich viele (41) Unterteilungen.

Für den Oktavsprung o soll unverändert gelten o = $\frac{1}{2}$. Der Quintensprung q muss nun angepasst werden: $q^{12} = o^7 = \left(\frac{1}{2}\right)^7$ und somit $q = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{12}} \approx 0{,}66742$. (Vgl. $\frac{2}{3} \approx 0{,}66667$)

Damit ergibt sich für die temperierte Tonleiter:

Name	Verhältnis der Länge der schwingenden Saite zur Grundlänge (120)	Länge der schwingenden Saite	Frequenz der schwingenden Saite
Prime	1:1	120	360
übermäßige Prime	$(0{,}5)^{\frac{1}{12}}:1 = 0{,}9439$	113,3	381,4
Sekunde	$(0{,}5)^{\frac{2}{12}}:1 = 0{,}8909$	106,9	404,1
kleine Terz	$(0{,}5)^{\frac{3}{12}}:1 = 0{,}8409$	100,9	428,1
(große) Terz	0,7937	95,2	453,6
Quarte	0,7492	89,9	480,5
Tritonus	0,7071	84,9	509,1
Quinte	0,6674	80,1	539,4
kleine Sexte	0,6300	75,6	571,4
(große) Sexte	0,5946	71,4	605,4
kleine Septime	0,5612	67,3	641,5
(große) Septime	0,5927	71,1	607,4
Oktave	0,5	60	720

Ansatz B
Damit das pythagoräische Komma nicht auftritt, muss bei Beibehaltung des Oktavensprungs gelten:

$q^{12} = \left(\frac{1}{2}\right)^{7}$. Es folgt $q = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{12}}$. Da die Quinte an 7. Stelle innerhalb einer Oktave steht, gilt für den gesuchten Faktor $k = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{12}}$.

Ansatz C

Für den gesuchten Faktor k muss gelten: Prime$\cdot k^{12}$ = Oktave, d.h. $1\cdot k^{12} = 0{,}5$. Es folgt $k = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{12}}$ (an dieser Stelle könnte auch die Exponentialfunktion eingeführt werden).

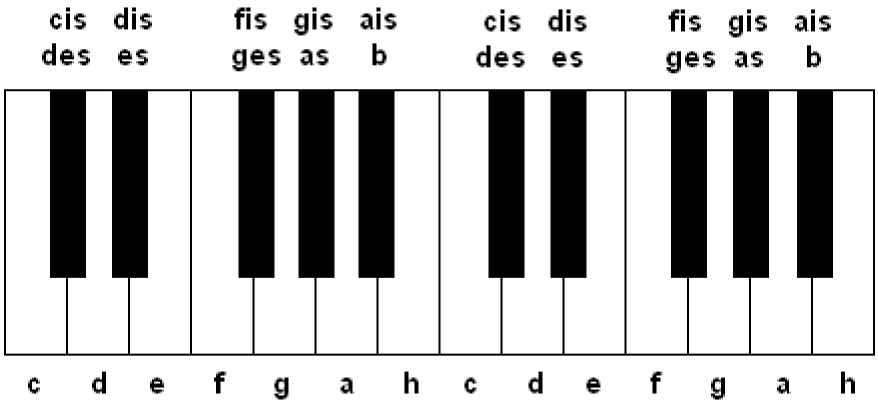
2. Lineare Rasterung und Tonleitern

In einem Pixelfeld der Größe 8x13 sollen Pixel nach folgender Vorschrift eingefärbt werden:
$y = \left[\frac{12}{7}\cdot x + 0{,}5\right]$ (wobei [ ] die Gauß-Klammer ist).

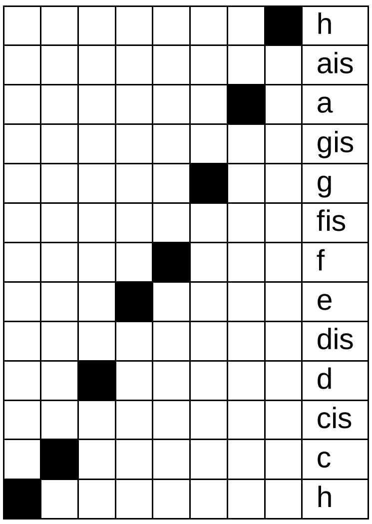
x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	0	2	3	5	7	9	10	12

12								■	d
11									cis/des
10							■		c
9						■			h
8									ais/b
7					■				a
6									gis/as
5				■					g
4									fis/ges
3			■						f
2		■							e
1									dis/es
0	■								d
	0	1	2	3	4	5	6	7	

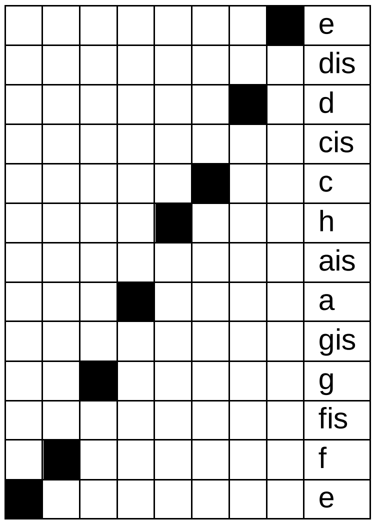
Vergleicht man die Abfolge der Einfärbungen, so erkennt man sofort den Zusammenhang zur Tonleiter (s.o.) bzw. zur Klaviatur (siehe nachfolgendes Bild). Die schwarz eingefärbten Pixel entsprechen den weißen Tasten, wenn man d als Grundton wählt.



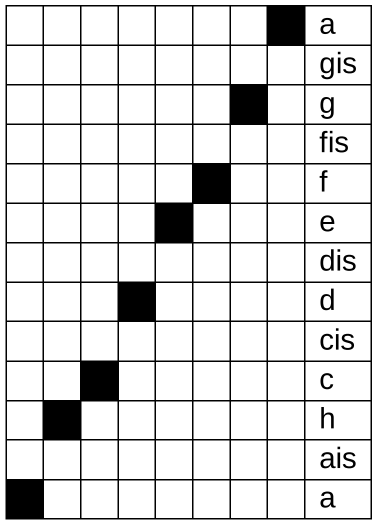
Die Funktionsvorschrift wird nun verändert: $y = \left[\frac{12}{7}\cdot x + \frac{n}{7} + 0{,}5\right]$ (n ganzzahlig von -3 bis 3). Es ergeben sich folgende Raster:



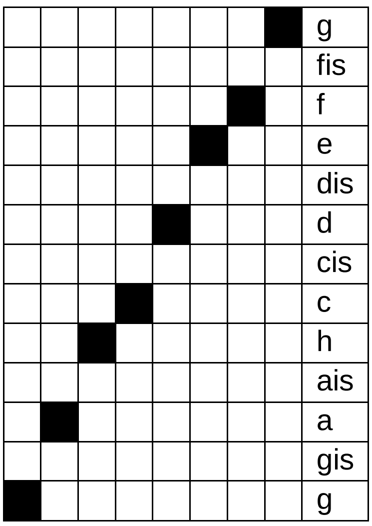
n = -3



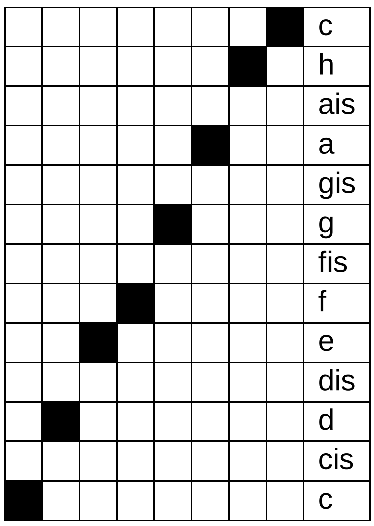
n = -2



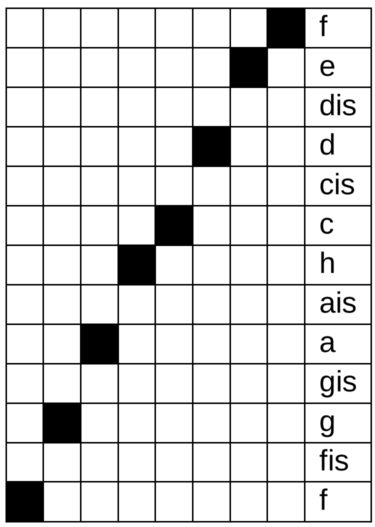
n = -1



n = 1



n = 2



n = 3