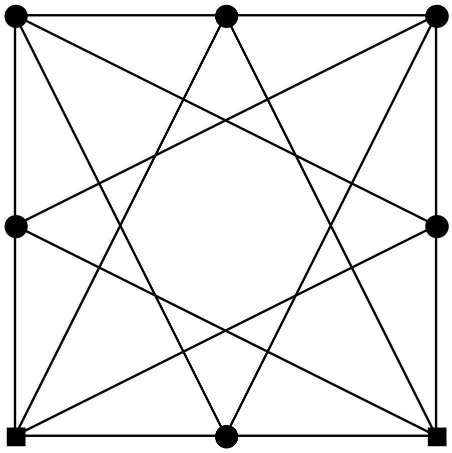
# Heuristische Strategien

Jürgen Zumdick

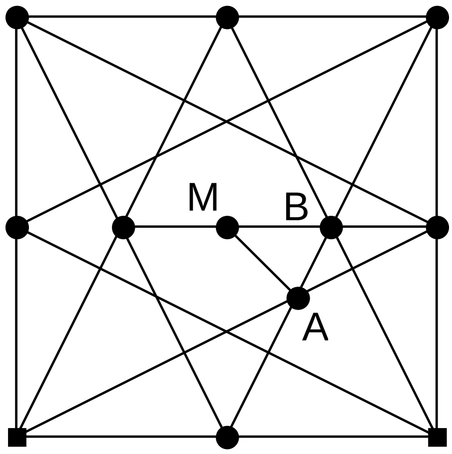
## I. Entwicklung heuristischer Strategien durch Reflexion über Problemlösungsschritte

Problem: Gegeben ist ein Quadrat der Seitenlänge a. Vom Mittelpunkt jeder Seite wird eine Strecke zu den gegenüberliegenden Eckpunkten gezogen. In der Mitte entsteht ein Achteck. Wie groß ist sein Flächeninhalt?

1. **Anfertigen einer Zeichnung**

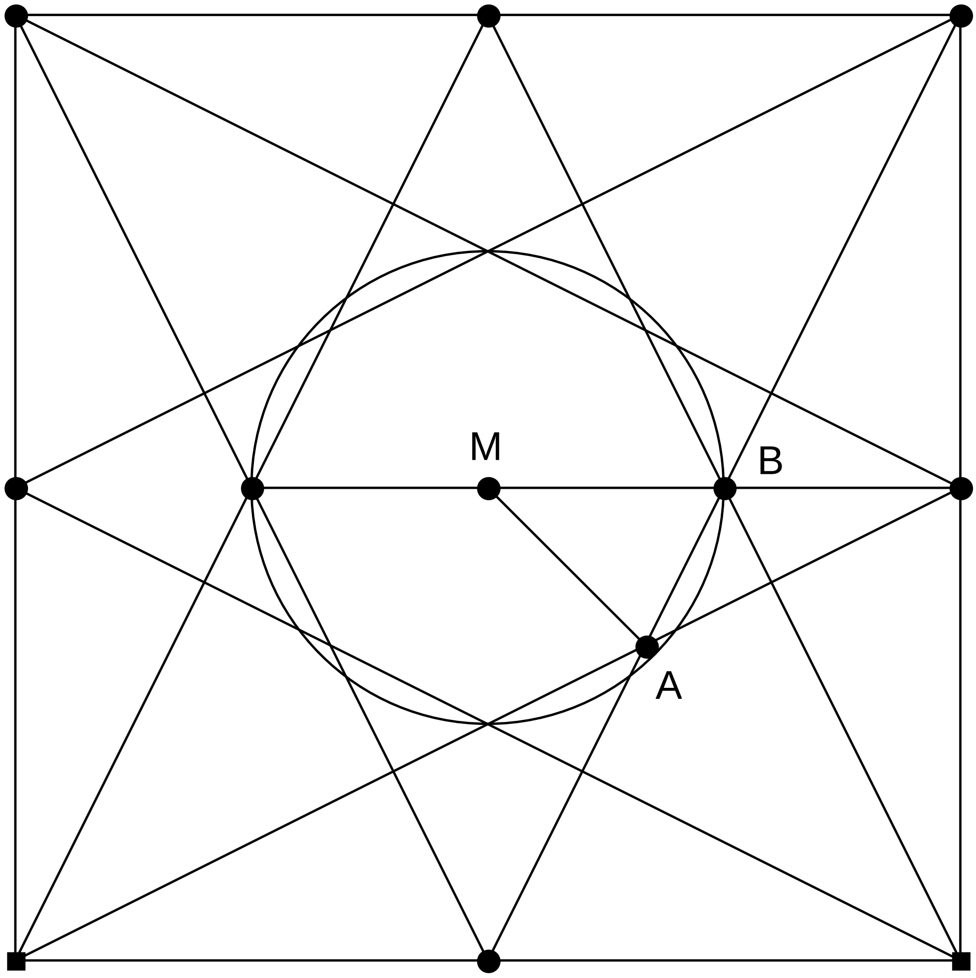


2. **Was ist gegeben, was ist gesucht?**
3. **Welche Verfahren/Lehrsätze kommen in Betracht, um das Gesuchte zu bestimmen?**
   Ein Achteck besteht aus 8 Dreiecken. Also helfen Flächensätze über Dreiecke weiter.
4. **Einführung von Bezeichnungen**
5. **Einführung von Hilfslinien**




6. **Sind bekannte Strukturen zu entdecken?**
   Das Achteck besteht aus 8 gleichschenkligen Dreiecken mit einem 45°-Winkel an der Spitze.
7. **Helfen die gefundenen Strukturen bei der Lösung des Problems?**
   Ist die Seite MB bekannt, so lässt sich mit Hilfe der Trigonometrie der Flächeninhalt des Achtecks bestimmen. MB hat vermutlich die Länge $\frac{a}{4}$ , was sich mit Hilfe eines Strahlensatzes und Symmetrieüberlegungen zeigen lässt.
8. **Ausführung:**
   a) Bestimmung der Länge von MB
   b) Bestimmung des Flächeninhalts A des Achtecks:
   $$A = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{a}{4} \cdot \sin 45° = \frac{a^2 \cdot \sqrt{2}}{8}.$$
9. **Hält die Lösung einer kritischen Überprüfung stand?**

Das Einzeichnen des Kreises um M mit Radius MB zeigt, dass keine gleichschenkligen Dreiecke vorliegen:

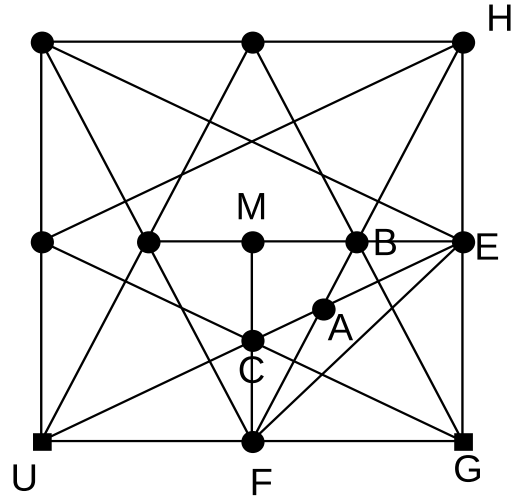



**10. Wo liegt der Denkfehler?**

Das Quadrat ist 4-fach rotationssymmetrisch und nicht 8-fach.

**11. Also Vorsicht: Jede Überlegung ist genau zu begründen. Beginne noch einmal bei 6.**

**12. Gibt es weitere bekannte Strukturen?**




MCAB scheint ein rechtwinkliger Drache zu sein, dessen Flächeninhalt mit Hilfe der Seitenlängen berechenbar ist.

**13. Ausführung**

Die Parallelität von BE und FG ist zu zeigen, so dass wie oben folgt: $\frac{a}{4}$ = BE = MB.

Analog folgt: MC = $\frac{a}{4}$.

Wie lang sind AC und AB?

**Welche weiteren Möglichkeiten gibt es, um Streckenlängen zu berechnen?**

Um die Abstandsformel zweier Punkte zu benutzen, müssen Koordinaten eingeführt werden. Sei U der Koordinatenursprung.

Dann folgt sofort: $B\left(\frac{3}{4}a;\frac{a}{2}\right)$ und $C\left(\frac{a}{2};\frac{a}{4}\right)$

A kann als Schnittpunkt zweier Geraden aufgefasst werden. A hat dann die Koordinaten $\left(\frac{2}{3}a;\frac{1}{3}a\right)$.

Es folgt: AB = $\frac{a}{12}\sqrt{5}$ = AC

Die Diagonalen bzw. Diagonalenabschnitte lassen sich mit Hilfe der Trigonometrie oder mit Hilfe der Abstandsformel zweier Punkte bestimmen.

Es folgt: BC = $\frac{a}{\sqrt{8}}$ und AM = $\frac{a}{\sqrt{18}}$ und

Flächeninhalt des Drachen $A = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{\sqrt{8}}\cdot\frac{a}{\sqrt{18}} = \frac{a^2}{24}$

Damit beträgt der Flächeninhalt des Achtecks (4 Drachen): $\frac{a^2}{6}$

**14. Gibt es Alternativen?**

Im Dreieck FEM sind FB und CE Seitenhalbierende, die sich somit im Verhältnis 2:1 schneiden.

Also: AB = $\frac{1}{3}\cdot FB = \frac{1}{6}\cdot FH = \frac{1}{6}\cdot\frac{a}{2}\cdot\sqrt{5}$.

Mit Hilfe des Cosinussatzes lässt sich MA im Dreieck ABM berechnen.

Es folgt: MA = $\frac{a}{\sqrt{18}}$

Für den Flächeninhalt des Dreiecks ABM gilt dann: $A = \frac{1}{2}\frac{a}{\sqrt{18}}\cdot\frac{a}{4}\cdot\sin 45° = \frac{a^2}{48}$

Somit beträgt der Flächeninhalt des Achtecks (8 Dreiecke) $\frac{a^2}{6}$.

**15. Ist das Ergebnis plausibel?**

## II. Weitere heuristische Strategien

### 1) Induktives Probieren

a) Formel für die endliche geometrische Reihe

1 = 1, 1 + 2 = 3, 1 + 2 + 4 = 7, 1 + 2 + 4 + 8 = 15 liefert die Vermutung
$1 + 2 + 4 +...+ 2^n = 2^n - 1$
1 = 1, 1 + 3 = 4, 1 + 3 + 9 = 13, 1 + 3 + 9 + 27 = 40
$s(n) = 3^n - 1$ erweist sich als falsch, $s(n) = (3^n - 1) / 2$ als richtig
q = 4 liefert die endgültige Vermutung $s(n) = (q^n - 1) / (q - 1)$
Mit dem Anfangsglied a erhält man: $a + aq + aq^2 +.. + aq^n = a(q^n - 1) / (q - 1)$
Beweis durch Rückwärtsrechnen (Multiplikation vorstehender Gleichung mit q-1)

Als Ausgangsproblem kann z.B. die Berechnung des Endkapitals eines Ratensparvertrags stehen.

b) $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+...+\frac{n}{(n+1)!}=?$

c)

| f(x)=g(x)·k(x) | g(x) | k(x) | f'(x) | g'(x) | k'(x) |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^9$ | x | $x^8$ | $9x^8$ | 1 | $8x^7$ |
| $x^9$ | $x^2$ | $x^7$ | $9x^8$ | 2x | $7x^6$ |
| $x^9$ | $x^3$ | $x^6$ | $9x^8$ | $3x^2$ | $6x^5$ |
| $x^9$ | $x^4$ | $x^5$ | $9x^8$ | $4x^3$ | $5x^4$ |

Beobachtung: Addiert man die Koeffizienten bei g' und h', so erhält man den Koeffizienten bei f'. Das Addieren der zugehörigen Funktionsterme ist jedoch wegen der unterschiedlichen Exponenten nicht möglich. Multipliziert man jedoch g'(x) mit h(x) und h'(x) mit g(x), so erhält man durch anschließende Addition die gewünschte Regel.
Zum Beweis geht man auf die Definition zurück (s.u.):

$$\left(g(x)\cdot k(x)\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)\cdot k(x+h)-g/x)\cdot k(x)}{h} \quad (1)$$

$$g'(x)\cdot k(x)+g(x)\cdot k'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot k(x)+g(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{k(x+h)-k(x)}{h} \quad (2)$$

Da weiteres Umformen von (1) in der Regel nicht von Erfolg gekrönt sein wird, wird die Methode des Rückwärtsarbeitens angewandt:

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot k(x)+g(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{k(x+h)-k(x)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(g(x+h)-g(x)\right)\cdot k(x)+g(x)\cdot\left(k(x+h)-k(x)\right)}{h}$$

Das Auflösen der Klammern liefert nicht den erhofften Ausdruck (1). Stünde jedoch im vorstehenden Ausdruck an der Stelle des ersten k(x) der Term k(x+h), so erhielte man den erhofften Ausdruck (1). Dies ist jedoch leicht zu erreichen, da im Ausdruck (2) k(x) hinterm dem ersten Bruch wegen der Stetigkeit durch $\lim_{h\to 0}k(x+h)$ ersetzt werden kann.

**Bedenken gegen induktive Schlüsse**

a) n² - n + 41 ist eine Primzahl
Das Einsetzen von z.B. n = 1 bis 10 liefert u. U. zwei Vermutungen:
1. $a_{n+1}=a_n+2n$, was verifiziert werden kann
2. $a_n$ ist eine Primzahl, was nur für n ≤ 40 gilt

b) Wenn $2^n$ modulo n = 2, dann ist n Primzahl (richtig für alle Primzahlen < 341; für 341 gilt: $2^{341}$ modulo 341 = 2, aber 341 = 11 · 33)

c) 31; 331; 3331; ...; 33333331 sind Primzahlen
333333331 = 17 · 19607843

d) $x^4 + y^4 + z^4 = w^4$ hat keine ganzzahlige Lösung
($2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 = 20615673^4$ ,
1988 von Naom Elkies entdeckt)

e) Von Gauß stammt ein logarithmisches Integral Li(n), welches die Anzahl der Primzahlen bis zur Zahl n abschätzt. Gauß vermutete, dass die Anzahl der Primzahlen mit diesem Integral immer überschätzt wird. 1933 gelang Skewes der Nachweis, dass ab $10^{10^{10^{34}}}$ mit einer Unterschätzung zu rechnen ist.

f) n² + (n+1)² ist entweder eine Quadratzahl oder eine Primzahl (stimmt für n = 1 bis 5)

**2) Analogiemethode**

a) Es seien a, b, c, d ∈ ]0:1]: (1-a)(1-b)(1-c)(1-d)>1-a-b-c-d

Löse ein analoges Problem mit weniger Variablen

b) Analytische Geometrie: Übertragen von Lösungsverfahren im $R^2$ nach $R^3$

c) Differentialrechnung/Integralrechnung: Summenregel $\rightarrow$ Differenzenregel

**3) Rückwärtsrechnen**

a) 6l mit einem 9l und 4l Eimer abfüllen

b) Nimm-Spiel (Auf einem Tisch liegen 15 (n) Hölzer. Zwei Spieler nehmen abwechselnd 1 bis 3 (k) Hölzer. Wer das letzte Holz nehmen muss, hat verloren)

c) Beweis der Produktregel der Differentialrechnung
(Gewinnen einer Vermutung durch induktives Probieren – kombiniertes Rückwärts- und Vorwärtsrechnen beim Beweis – s.o.)

**4) Überwinde das System**

a) Konstruktion eines Trapezes aus den 4 Seiten (auch: Teilfigur konstruieren)
- Dreieck innerhalb des Trapezes
- Trapez mit Hilfe eines Dreiecks zum Parallelogramm ergänzen
- Strahlensatz (zunächst Berechnung weiterer Längen)

b) 9 Punkte eines Quadratgitters durch einen Streckenzug mit 4 Teilstrecken verbinden

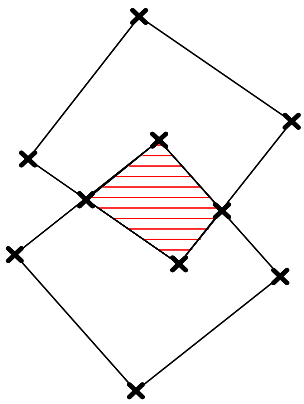
**5) Gehe auf die Definition zurück**

Ableitungsbestimmung $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \textit{für} \;\; x \neq 0 \\ 0 & \textit{für} \;\; x = 0 \end{cases}$

**6) Fallunterscheidungen (an verschiedenartigen Beispielen eine Vermutung gewinnen) bzw. Spezialfälle untersuchen**

a) Division von Dezimalzahlen: 5,2 : 0,13; 60 : 1,5

b)



Zwei Quadrate mit gleicher Seitenlänge seien so gelegt, dass die Ecke des einen Quadrats im Mittelpunkt des anderen liegt. Was kann man über den Flächeninhalt aussagen?

**7) Symmetrieprinzip**

Gegeben sind eine Gerade und zwei Punkte, die beide auf derselben Seite der Geraden liegen. Von welchem Punkt der Geraden erscheint die Verbindungsstrecke der beiden Punkte unter dem größten Winkel? (Anwendungsproblem: Fotografieren von einer Straße aus)

**8) Methode des falschen Ansatzes**

In einem Stall sind Kaninchen und Hühner, insgesamt 41. Wie viel Kaninchen und wie viel Hühner sind es, wenn die Tiere zusammen 116 Beine haben.
Annahme, es sind 20 Kaninchen. Dann hätte man 122 Beine, also 6 Beine zu viel, also ...

**9) Methoden zum Lösen spezieller Gleichungen**

Beispiel: $\dfrac{1}{\sqrt{2x}-1} = 2$

a) Abdeckmethode

Decke den Nenner ab – was muss dort stehen? Ergebnis: $\sqrt{2x}-1 = \dfrac{1}{2}$

Decke den Wurzelterm ab – was muss dort stehen? Ergebnis: $\sqrt{2x} = 1{,}5$
Decke den Radikanden ab: 2x = 2,25
Decke x ab: x = 1,125

b) Rückwärtsrechnen

$$x \xrightarrow{\cdot 2} 2x \xrightarrow{\sqrt{\;}} \sqrt{2x} \xrightarrow{-1} \sqrt{2x} - 1 \xrightarrow{\frac{1}{x}} 2$$

$$1{,}125 \xleftarrow[:2]{} 2{,}25 \xleftarrow[Quadrat]{} 1{,}5 \xleftarrow[+1]{} \frac{1}{2} \xleftarrow[\frac{1}{x}]{} 2$$

c) Probiermethode → Intervallschachtelung

## 10) Heuristik nach Polya

### 1. Verstehen der Aufgabe

- Was ist unbekannt? Was ist gegeben? Wie lautet die Bedingung?
- Ist es möglich, die Bedingung zu befriedigen? Ist die Bedingung ausreichend, um die Unbekannte zu bestimmen? Oder ist sie unzureichend? Oder überbestimmt? Oder kontradiktorisch?
- Zeichne eine Figur! Führe eine passende Bezeichnung ein!
- Trenne die verschiedenen Teile der Bedingung! Kannst Du sie hinschreiben?

### 2. Ausdenken eines Planes

- Hast Du die Aufgabe schon früher gesehen? Oder hast Du dieselbe Aufgabe in einer wenig verschiedenen Form gesehen?
- Kennst Du eine verwandte Aufgabe? Kennst Du einen Lehrsatz, der förderlich sein könnte?
- Betrachte die Unbekannte! Und versuche, Dich auf eine Dir bekannte Aufgabe zu besinnen, die dieselbe oder eine ähnliche Unbekannte hat.
- Hier ist eine Aufgabe, die der Deinen verwandt und schon gelöst ist. Kannst Du sie gebrauchen? Kannst Du ihr Resultat verwenden? Kannst Du ihre Methode verwenden? Würdest Du irgend ein Hilfselement einführen, damit Du sie verwenden kannst?
- Kannst Du die Aufgabe anders ausdrücken? Kannst Du sie auf noch verschiedene Weise ausdrücken? Geh auf die Definition zurück!
- Wenn Du die vorliegende Aufgabe nicht lösen kannst, so versuche, zuerst eine verwandte Aufgabe zu lösen. Kannst Du Dir eine zugängliche verwandte Aufgabe denken? Eine allgemeinere Aufgabe? Eine speziellere Aufgabe? Eine analoge Aufgabe? Kannst Du einen Teil der Aufgabe lösen? Behalte nur einen Teil der Bedingung bei und lasse den anderen fort; wie weit ist die Unbekannte dann bestimmt, wie kann ich sie verändern? Kannst Du etwas Förderliches aus den Daten ableiten? Kannst Du Dir andere Daten denken, die geeignet sind , die Unbekannte zu bestimmen? Kannst Du die Unbekannte ändern oder die Daten oder, wenn nötig, beide, so daß die neue Unbekannte und die neuen Daten einander näher sind?
- Hast du alle Daten genutzt? Hast Du die ganze Bedingung benutzt? Hast Du alle wesentlichen Begriffe in Rechnung gezogen, die in der Aufgabe enthalten sind?

### 3. Ausführen des Planes

- Wenn Du Deinen Plan der Lösung durchführst, so kontrolliere jeden Schritt. Kannst Du deutlich sehen, daß der Schritt richtig ist? Kannst Du beweisen, daß er richtig ist?

### 4. Rückschau

- Kannst Du das Resultat kontrollieren? Kannst Du den Beweis kontrollieren?
- Kannst Du das Resultat auf verschiedene Weise ableiten?
- Kannst Du es auf den ersten Blick sehen? Kannst Du das Resultat oder die Methode für irgend eine andere Aufgabe gebrauchen?

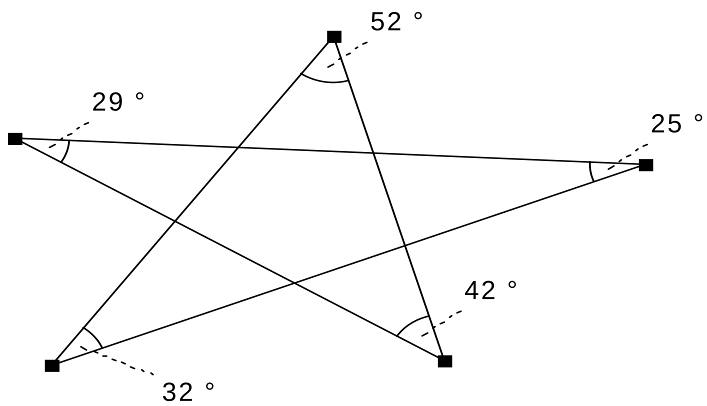
(Polya, G. : Schule des Denkens, Francke 1967, Innendeckel;

zitiert in: H. Winter: Entdeckendes Lernen im MU, Braunschweig 1991, S. 179)

Im Buch von Winter finden sich Beispiele zur Anwendung des obigen Kataloges

**11) Sätze eines verwandten Umfeldes benutzen**

Beispiel: Innenwinkelsumme eines Sternfünfecks (Messen liefert eine Beweisidee)




**12) Quadrat - und Dreiecksgitter als heuristische Hilfsmittel**

**13) Entdecken von Sätzen am Parallelogrammgitter**

**14) Zahlenbeispiele betrachten**

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

Wenn der allgemeine Beweis nicht geführt werden kann, dann betrachte zunächst ein Zahlenbeispiel.