Differentialrechnung

Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ bzw. $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Jürgen Zumdick

Inhalt

1. Ableitungsregeln und Ableitung von $f(x)=x^{\frac{n}{m}}$

1.1 Ableitung von x^n

a) Polynomdivision

$$\left(x^n-x_0^n\right):\left(x-x_0\right)=x^{n-1}+x_0\cdot x^{n-2}+x_0^2\cdot x^{n-3}+\ldots+x_0^{n-2}\cdot x+x_0^{n-1}$$

Es folgt : $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^n-x_0^n}{x-x_0}=x_0^{n-1}+x_0^{n-1}+x_0^{n-1}+\ldots+x_0^{n-1}+x_0^{n-1}=n\cdot x_0^{n-1}$

Also : $f(x)=x^n \Rightarrow f'(x)=n\cdot x^{n-1}$

b) Binomischer Lehrsatz

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^{n-k}\cdot h^k}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{x^n+n\cdot x^{n-1}\cdot h+\binom{n}{2}\cdot x^{n-2}\cdot h^2+\ldots+h^n-x^n}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{n\cdot x^{n-1}\cdot h+\binom{n}{2}\cdot x^{n-2}\cdot h^2+\ldots+h^n}{h}=\lim_{h\to 0}n\cdot x^{n-1}+\binom{n}{2}\cdot x^{n-2}\cdot h+\ldots+h^{n-1}=n\cdot x^{n-1}$$

c) Vollständige Induktion - Rekursionsformel

1) mit Hilfe des Differenzenquotienten

Behauptung: $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

Beweis:

Induktionsanfang: $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ (Die Winkelhalbierende hat die Steigung 1)

Induktionsschluss: Zu zeigen: $(x^n)' = nx^{n-1} \Rightarrow (x^{n+1})' = (n+1)x^n$

$$(x^{n+1})' = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{n+1}-x^{n+1}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)(x+h)^n-x^{n+1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{x((x+h)^n-x^n)}{h}+(x+h)^n\right] = x\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}+\lim_{h\to 0}(x+h)^n$$

$$= x(x^n)'+x^n \ (Re\mathit{kursionsformel})$$

$$= xnx^{n-1}+x^n = (n+1)x^n \ (\mathit{nach\ Voraussetzung})$$

2) mit Hilfe der Produktregel

Induktionsschluss:

$(x^{n+1})' = (x^n\cdot x)' = (x^n)'\cdot x + (x^n)\cdot x' = n\cdot x^{n-1}\cdot x + x^n = (n+1)\cdot x^n$

1.2 Ableitungen von $\sqrt{x};\frac{1}{x}$

a) $f(x)=\sqrt{x}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

b) $f(x)=\frac{1}{x}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x-(x+h)}{h\cdot x\cdot(x+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x\cdot(x+h)}=-\frac{1}{x^2}$$

1.3 Summen- und Faktorregel

$$f(x)=g(x)+h(x)\Rightarrow f'(x)=g'(x)+h'(x)$$

$$f(x)=a\cdot g(x)\Rightarrow f'(x)=a\cdot g'(x)$$

Beweis mit Hilfe der Grenzwertsätze

1.4 Produktregel

a) Beweis mit Nullergänzung

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x+h)+f(x)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(f(x+h)-f(x)\right)\cdot g(x+h)+f(x)\cdot\left(g(x+h)-g(x)\right)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}g(x+h)+\lim_{h\to 0}f(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=$$

$$f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

b) Beweis ohne Nullergänzung durch Umformung des Differenzenquotienten

$$m_f = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Leftrightarrow f(x+h) = m_f \cdot h + f(x) \wedge h \neq 0$$

$$m_g = \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \Leftrightarrow g(x+h) = m_g \cdot h + g(x) \wedge h \neq 0$$

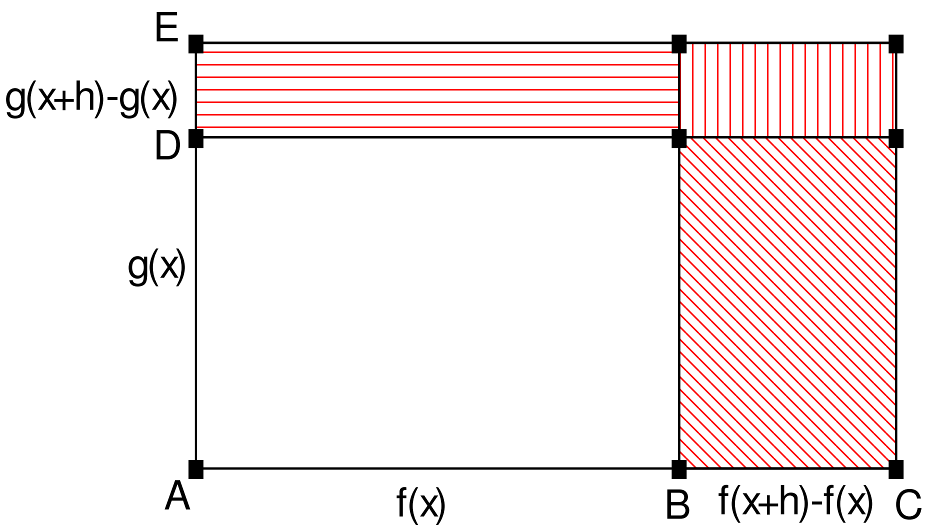
$$f(x+h) \cdot g(x+h) = (m_f \cdot h + f(x)) \cdot (m_g \cdot h + g(x))$$

$$f(x+h) \cdot g(x+h) = m_f \cdot m_g \cdot h^2 + m_f \cdot h \cdot g(x) + f(x) \cdot m_g \cdot h + f(x) \cdot g(x)$$

$$\frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} = m_f \cdot m_g \cdot h + m_f \cdot g(x) + f(x) \cdot m_g$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

c) Beweis durch Interpretation als Flächeninhalte



Es sei: AB = f(x), AC = f(x+h), AD = g(x), AE = g(x+h) :

f(x + h)·g(x + h) - f(x)·g(x) ist dann eine Differenz von Flächeninhalten, die sich wiederum als Summe der Inhalte der schraffierten Rechtecke interpretieren lässt. Diese Summe lässt sich auf verschiedene Weise zerlegen:

1. f(x + h)·g(x + h) - f(x)·g(x) = (f(x+h) - f(x))·g(x) + (g(x+h) - g(x)) · f(x+h)
2. f(x + h)·g(x + h) - f(x)·g(x) = (f(x+h) - f(x))·g(x+h) + (g(x+h) - g(x)) · f(x)
3. f(x + h)·g(x + h) - f(x)·g(x) =
   (f(x+h) - f(x))·g(x) + (f(x+h) - f(x))· (g(x+h) – g(x)) + (g(x+h) – g(x)) · f(x)

Nach 1. folgt:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} g(x)$$
$$+ \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} f(x+h) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

Im 2. Fall wird analog verfahren..

Nach 3. folgt:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}=+\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}g(x)$$
$$+\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\left(g(x+h)-g(x)\right)+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}f(x)$$
$$=f'(x)\cdot g(x)+f'(x)\cdot 0+g'(x)\cdot f(x)=f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x)$$

d) Beweis durch Rückwärtsrechnen bei Vermutung des Ergebnisses
Vermutung mit Hilfe der folgenden Tabelle

f(x)=g(x)·k(x)	g(x)	k(x)	f'(x)	g'(x)	k'(x)
x^9	x	x^8	$9x^8$	1	$8x^7$
x^9	x^2	x^7	$9x^8$	2x	$7x^6$
x^9	x^3	x^6	$9x^8$	$3x^2$	$6x^5$
x^9	x^4	x^5	$9x^8$	$4x^3$	$5x^4$

Beobachtung: Addiert man die Koeffizienten bei g' und h', so erhält man den Koeffizienten bei f'. Das Addieren der zugehörigen Funktionsterme ist jedoch wegen der unterschiedlichen Exponenten nicht möglich. Multipliziert man jedoch g'(x) mit h(x) und h'(x) mit g(x), so erhält man durch anschließende Addition die gewünschte Regel.
Zum Beweis geht man auf die Definition zurück (s.u.):

$$\left(g(x)\cdot k(x)\right)'=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)\cdot k(x+h)-g/x)\cdot k(x)}{h}\quad(1)$$

$$g'(x)\cdot k(x)+g(x)\cdot k'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot k(x)+g(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{k(x+h)-k(x)}{h}\,(2)$$

Da weiteres Umformen von (1) in der Regel nicht von Erfolg gekrönt sein wird, wird die Methode des Rückwärtsarbeitens angewandt:

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot k(x)+g(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{k(x+h)-k(x)}{h}=$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(g(x+h)-g(x)\right)\cdot k(x)+g(x)\cdot\left(k(x+h)-k(x)\right)}{h}$$

Das Auflösen der Klammern liefert nicht den erhofften Ausdruck (1). Stünde jedoch im vorstehenden Ausdruck an der Stelle des ersten k(x) der Term k(x+h), so erhielte man den erhofften Ausdruck (1). Dies ist jedoch leicht zu erreichen, da im Ausdruck (2) k(x) hinterm dem ersten Bruch wegen der Stetigkeit durch $\lim\limits_{h\to 0}k(x+h)$ ersetzt werden kann.

1.5 Quotientenregel

a) Beweis mit Nullergänzung

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x+h)}{g(x+h)\cdot g(x)\cdot h}=$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x+h)}{g(x+h)\cdot g(x)\cdot h}=$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(f(x+h)-f(x)\right)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x)}{g(x+h)\cdot g(x)}-\lim_{h\to 0}\frac{f(x)}{g(x+h)\cdot g(x)}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=$$
$$\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

b) Beweis ohne Nullergänzung durch Umformung des Differenzenquotienten
(Definition von m_f und m_g siehe Produktregel)

$$\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{m_f\cdot h+f(x)}{m_g\cdot h+g(x)}-\frac{f(x)}{g(x)}=$$

$$\frac{m_f\cdot h\cdot g(x)+f(x)\cdot g(x)-m_g\cdot h\cdot f(x)-g(x)\cdot f(x)}{(m_g\cdot h+g(x))\cdot g(x)}=$$

$$\frac{m_f\cdot h\cdot g(x)-m_g\cdot h\cdot f(x)}{(m_g\cdot h+g(x))\cdot g(x)}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{m_f\cdot g(x)-m_g\cdot f(x)}{(m_g\cdot h+g(x))\cdot g(x)}=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

c) Beweis mit Hilfe der Produktregel (und der Kettenregel)

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\left(f\frac{1}{g}\right)'=f'\frac{1}{g}+f\left(\frac{1}{g}\right)'=f'\frac{1}{g}-f\frac{g'}{g^2}=\frac{f'g-fg'}{g^2}$$

$$h(x)=\frac{1}{g(x)}$$

$$h'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_0)}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x_0)-g(x)}{g(x)g(x_0)(x-x_0)}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left(-\frac{1}{g(x)g(x_0)}\right)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=-\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}\qquad\left(g(x_0)\neq 0\right)$$

oder:

$$h=\frac{f}{g}\Leftrightarrow f=g\cdot h$$

$$f'=g'\cdot h+g\cdot h'\Leftrightarrow$$

$$g\cdot h'=f'-g'\cdot h\Leftrightarrow g\cdot h'=f'-g'\cdot\frac{f}{g}\Leftrightarrow h'=\frac{f'}{g}-\frac{g'\cdot f}{g^2}\Leftrightarrow h'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$$

1.6 Kettenregel

a) Standardbeweis (unter der Voraussetzung g(x) ≠ g(x_0) in U(x_0))

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{g(x)-g(x_0)}\right)=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$\lim_{g(x)\to g(x_0)}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'\left(g(x_0)\right)\cdot g'(x_0)$$

Wegen der Stetigkeit von g gilt: $x\to x_0\Rightarrow g(x)\to g(x_0)$

Hinweis: Es existieren Funktionen, bei denen obige Voraussetzung nicht erfüllt ist:

$$g(x)=\begin{cases} x^2\cdot\sin\frac{1}{x} & für \quad x\neq 0 \\ 0 & für \quad x=0 \end{cases}\quad ,x_0=0$$

b) Umformung des Differenzenquotienten mit h

f(x) = g(l(x))

z = l(x), l(x + h) = z + k

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{g(l(x+h))-g(l(x))}{h}=\frac{g(z+k)-g(z)}{h}=\frac{m_g\cdot k}{h}=\frac{m_g\cdot(l(x+h)-l(x))}{h}$$

$$mit\ m_g=\frac{g(z+k)-g(z)}{k}\wedge k\neq 0$$

Strebt h gegen 0, dann strebt auch k gegen 0.

Also folgt:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{k\to 0}m_g\cdot\lim_{h\to 0}\frac{l(x+h)-l(x)}{h}=g'(l(x))\cdot l'(x)$$

c) Beweis der Kettenregel ohne einschränkende Voraussetzung

Hilfssatz: Eine Funktion f ist genau dann an der Stelle x_0 differenzierbar, wenn es in einer Umgebung von x_0 eine stetige Funktion f_1 gibt, so dass

$f(x_0 + h) – f(x_0) = h\cdot f_1(x_0 + h)$ für $h \neq 0$ und $f_1(x_0) = f'(x_0)$

Dieser Hilfssatz besagt, dass die Sekantensteigungsfunktion an der Stelle x_0 stetig ergänzbar ist.

Beweis des Hilfssatzes:

Voraussetzung: f ist an der Stelle x_0 differenzierbar.

Dann ist f in einer Umgebung von x_0 definiert und folglich auch

$$f_1(x_0+h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\text{ für h} \neq 0.$$

Wegen der Differenzierbarkeit von f gilt:

$$f_1(x_0)=\lim_{h\to 0}f_1(x_0+h)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$$

Voraussetzung: Die Funktion f_1 mit den oben genannten Bedingungen existiert.

Aus dieser Voraussetzung folgt, dass mit $h \neq 0$ auch die Funktion f mit

$f_1(x_0+h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existiert. Wegen der Stetigkeit von f_1 4existiert der Grenzwert für h gegen 0, so dass f an der Stelle x_0 differenzierbar ist.

Damit sind beide Richtungen des Hilfssatzes bewiesen.

Beweis der Kettenregel:

Es sei nun f(x) = g(l(x))

Da l an der Stelle x differenzierbar ist, gibt es nach vorstehendem Hilfssatz Funktionen l_1 und g_1 mit:

1. $l(x+h)-l(x)=h\cdot l_1(x+h)\ mit\ l_1(x)=l'(x)$
2. $g(x+k)-g(x)=k\cdot g_1(x+k)\ mit\ g_1(x)=g'(x)$

Sei nun

3. $z=l(x)\ und\ k=h\cdot l_1(x+h)$

$$f(x+h)-f(x)=g\big(l(x+h)\big)-g\big(l(x)\big)$$
$$=g\big(l(x)+h\cdot l_1(x+h)\big)-g\big(l(x)\big)\ wegen\ 1.$$
$$=g(z+k)-g(z)\ wegen\ 3.$$
$$=k\cdot g_1(z+k)\ wegen\ 2.$$

und weiter:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{k\cdot g_1(z+k)}{h}=l_1(x+h)\cdot g_1(z+k)\ wegen\ 3.\ (*)$$

Außerdem gilt nach 3.:

$$\lim_{h\to 0}k=\lim_{h\to 0}h\cdot\lim_{h\to 0}l_1(x+h)=0\cdot l'(x)=0$$

Strebt als h gegen 0, so strebt auch k gegen 0. Somit folgt aus (*):

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}l_1(x+h)\cdot\lim_{k\to 0}g_1(z+k)=l'(x)\cdot g'(z)$$

$$=l'(x)\cdot g'(l(x))=g'(l(x))\cdot l'(x)$$

d) Vermutung zur Kettenregel und Beweis wie unter 1.6 a)

1) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(x+h)^2+1}-\sqrt{x}}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{(x+h)^2+1}-\sqrt{x^2+1}\right)\cdot\left(\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}{h\cdot\left(\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x}\right)}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+1-(x^2+1)}{h\cdot\left(\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{2x+h}{\left(\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}=\frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+1}}$$

2) f(x) = sin(2x) = 2sinx·cosx

$$f'(x)=2\cdot\cos x\cdot\cos x+2\cdot\sin x\cdot(-\sin x)=2\cdot(\cos^2 x-\sin^2 x)=2\cdot\cos(2x)$$

3) $f(x) = (x^3 + 1)^2 = x^6 + 2x^3 + 1$

$f'(x) = 6x^5 + 6x^2 = 6x^2(x^3+1)$

4) $f(x) = \sin^2 x = \sin x\cdot\sin x$

$f'(x) = \cos x\cdot\sin x + \sin x\cdot\cos x = 2\cdot\sin x\cdot\cos x$

Die Analyse obiger Beispiele führt auf die Vermutung:

$$f(x)=g(l(x))\Rightarrow f'(x)=g'(l(x))\cdot l'(x)$$

Nun lässt sich der Beweis unter 1.6 a) leichter führen, da die Vermutung eine Erweiterung des Differenzenquotienten mit $g(x)-g(x_0)$ nahe legt.

1.7 Ableitung der Umkehrfunktion

a) Ansatz über die Identität

(Voraussetzung: $f'(x) \neq 0$)

1. $x = f^*(f(x))$. Die Ableitung nach x liefert: $1 = f^{*\prime}(f(x))f'(x)$.

   Es folgt: $f^{*\prime}(f(x))=\dfrac{1}{f'(x)}$ und

   $f^{*\prime}(y)=\dfrac{1}{f'(f^*(y))}$. Die Umbenennung von x in y liefert $f^{*\prime}(x)=\dfrac{1}{f'(f^*(x))}$

2. $y = f(f^*(y))$. Die Ableitung nach x liefert $y' = f'(f^*(y))f^{*\prime}(y)y' \Leftrightarrow f^{*\prime}(y)=\dfrac{1}{f'(f^*(y))}$

   Die Umbenennung von x in y liefert $f^{*\prime}(x)=\dfrac{1}{f'(f^*(x))}$

3. $x = f(f^*(x))$. Die Ableitung nach x liefert: $1 = f'(f^*(x))f^{*\prime}(x) \Leftrightarrow f^{*\prime}(x)=\dfrac{1}{f'(f^*(x))}$

b) Ansatz über den Differenzenquotienten
(Voraussetzung: $f'(x) \neq 0$)

$y = f(x)$, $y + k = f(x + h)$, $f^*(y + k) = x + h$

$$\frac{f^*(y+k) - f^*(y)}{k} = \frac{x+h-x}{f(x+h)-f(x)} = \frac{1}{\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

Grenzübergang: $f^{*\prime}(y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{f'(f^*(y))}$

Die Umbenennung von x in y liefert $f^{*\prime}(x) = \dfrac{1}{f'(f^*(x))}$

1.8 Ableitung von $x^{-n}; x^{\frac{1}{m}}; x^{\frac{n}{m}}$

a) Ableitung von $f(x) = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$

1) **Quotientenregel**

$$f'(x) = \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot n \cdot x^{n-1}}{\left(x^n\right)^2} = -n \cdot x^{-n-1}$$

2) **Kettenregel**

$$f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -n \cdot \frac{1}{x^{n+1}} = -n \cdot x^{-n-1}$$

b) Ableitung von $f(x) = x^{\frac{1}{m}} \Leftrightarrow \left(f(x)\right)^m = x$

1) **Kettenregel**

$$\left(f(x)\right)^m = x \Rightarrow m \cdot \left(f(x)\right)^{m-1} \cdot f'(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{m \cdot \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{m-1}} = \frac{1}{m} \cdot x^{\frac{1}{m}-1}$$

2) **Umkehrfunktion**
f ist die Umkehrfunktion von $f^*(x) = x^m$

$$f'(x) = \frac{1}{m\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{m-1}} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{x^{1-\frac{1}{m}}} = \frac{1}{m} x^{\frac{1}{m}-1}$$

c) Ableitung von $f(x) = x^{\frac{n}{m}}$

1) $f(x) = \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^n$

$$f(x) = \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^n \Rightarrow f'(x) = n\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{n-1} \frac{1}{m} x^{\frac{1}{m}-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{n}{m} x^{\frac{n-1}{m}+\frac{1}{m}-1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}$$

2) $\left(f(x)\right)^m = x^n$

$$\left(f(x)\right)^m = x^n \Rightarrow m\cdot\left(f(x)\right)^{m-1}\cdot f'(x) = n\cdot x^{n-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{n\cdot x^{n-1}}{m\cdot\left(x^{\frac{n}{m}}\right)^{m-1}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{n}{m}\cdot x^{\frac{n}{m}-1}$$

3) $\left(f(x)\right)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{m}}$

$$\frac{1}{n}\cdot\left(f(x)\right)^{\frac{1}{n}-1}\cdot f'(x) = \frac{1}{m}\cdot x^{\frac{1}{m}-1} \Rightarrow \frac{1}{n}\cdot\left(x^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{1}{n}-1}\cdot f'(x) = \frac{1}{m}\cdot x^{\frac{1}{m}-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\cdot x^{\frac{1-n}{m}} f'(x) = \frac{1}{m}\cdot x^{\frac{1}{m}-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{n}{m}\cdot\frac{x^{\frac{1}{m}-1}}{x^{\frac{1-n}{m}}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{n}{m}\cdot x^{\frac{n}{m}-1}$$

2. *Ableitung der trigonometrischen Funktionen und deren Umkehrfunktionen*

1) Ableitung von sinx

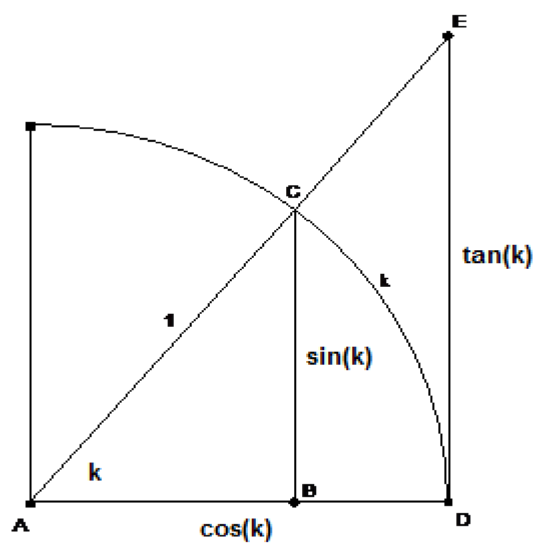
1. Weg

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{2x+h}{2}}{h} = \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos(x+\frac{h}{2})$$

(Benutzte Formel: $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$)

Strebt h gegen 0, so strebt auch $k = \frac{h}{2}$ gegen 0 und man erhält:

$$\sin'(x) = \lim_{k\to 0}\left(\frac{\sin k}{k}\cdot\cos(x+k)\right) = \lim_{k\to 0}\left(\frac{\sin k}{k}\right)\cdot\cos x$$



Ein Flächenvergleich zeigt: $A_{ABC} < A_{Sektor\ ADC} < A_{ADE}$

Es folgt: $\frac{\sin k \cdot \cos k}{2} < \frac{\pi \cdot 1^2 \cdot k}{2\pi} < \frac{\tan k \cdot 1}{2} \Leftrightarrow \cos k < \frac{k}{\sin k} < \frac{1}{\cos k} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos k} > \frac{\sin k}{k} > \cos k$

Es folgt: $\lim_{k \to 0} \frac{\sin k}{k} = 1$

Statt des Dreiecks ABC kann auch das Dreieck ADC betrachtet werden.

Ergebnis: sin'(x) = cosx

2. Weg

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cdot \cosh + \cos x \cdot \sinh - \sin x}{h} = \sin x \cdot \frac{(\cosh - 1)}{h} + \cos x \cdot \frac{\sinh}{h}$$

(Benutzte Formel: $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$)

$\lim_{h \to 0} \frac{\sinh}{h} = 1$ (Beweis siehe oben)

Berechnung des Grenzwertes $\frac{\cosh - 1}{h}$ (siehe obige Figur):

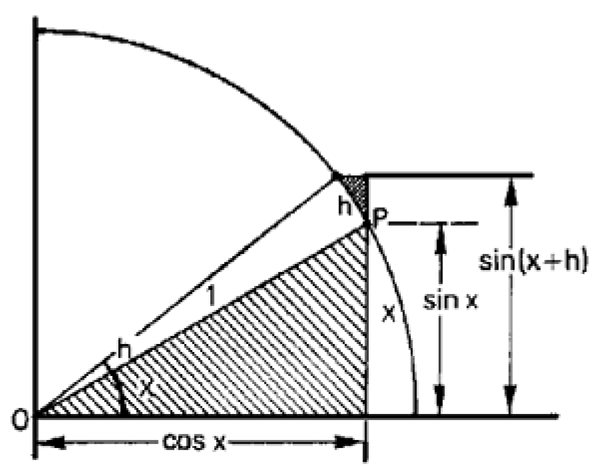
$$\overline{BD}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{DC}^2 \le k^2$$

$$(1 - \cos k)^2 + \sin^2 k \le k^2$$

Ausklammern und Anwenden des trigonometrischen Pythagoras liefert: $\frac{1 - \cos k}{k} \le k$

Wegen $0 \le \frac{1 - \cos k}{k}$ folgt: $\lim_{k \to 0} \frac{1 - \cos k}{k} = 0$. Daraus folgt: $\lim_{k \to 0} \frac{\cos k - 1}{k} = 0$

3. Weg (mit Hilfe ähnlicher Dreiecke)



Für kleine h ist die obere schraffierte Figur ein Dreieck (Ersetzen des Bogenstücks durch ein Tangentenstück). Die schraffierten Dreiecke sind dann ähnlich, so dass gilt:

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \approx \frac{\cos x}{1}$$

2) Ableitung von cos x

$$\cos' x = \sin'\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

3) **Ableitung von tan x**

$$\tan' x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

oder:

$$\tan' x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

4) **Ableitung von arcsin x**

Anwendung der Ableitungsregel für die Umkehrfunktion:

$$\arcsin' x = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

Umformung:

$$z = \cos(\arcsin x)$$

$$z^2 = \cos^2(\arcsin x) = 1 - \sin^2(\arcsin x) = 1 - x^2$$

Also:

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

5) **Ableitung von arccos x**

Anwendung der Ableitungsregel für die Umkehrfunktion:

$$\arccos' x = -\frac{1}{\sin(\arccos x)}$$

Umformung:

$$z = \sin(\arccos x)$$

$$z^2 = \sin^2(\arccos x) = 1 - \cos^2(ar\cos x) = 1 - x^2$$

Also:

$$\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

6) **Ableitung von arctan x**

$$\arctan' x = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

3. *Ableitung der Exponential- und Logarithmusfunktionen*

1) Ableitung von f(x) = a^x

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^{0+h} - a^0}{h} = a^x \cdot f'(0)$$

Unter den Exponentialfunktionen gibt es sicherlich eine, mit f'(0) = 1 (zeichnerisches Differenzieren zeigt, dass die Basis zwischen 2 und 3 liegen muss).

In einer Umgebung von 0 stimmt die Funktion mit ihrer Tangente überein: $a^x \approx x + 1$

Sei $x_n = \frac{1}{n}$. Dann gilt $a^{\frac{1}{n}} \approx \frac{1}{n} + 1$ für große n, bzw. $a \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ für große n.

Also: $a = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Für Unterrichtszwecke reicht eine näherungsweise Bestimmung von a mit dem Taschenrechner. $a \approx 2{,}718$. Dies ist die Eulersche Zahl e.

Ergebnis: $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

2) Ableitung von $f(x) = x^r, r \in R$

$$f(x) = x^r \Leftrightarrow f(x) = e^{r \cdot \ln x} \Rightarrow f'(x) = e^{r \cdot \ln x} \cdot r \cdot \frac{1}{x} = r \cdot x^{r-1}$$

3) Ableitung von f(x) = a^x

$$f(x) = a^x \Leftrightarrow f(x) = e^{x \cdot \ln a} \Rightarrow f'(x) = \ln a \cdot e^{x \cdot \ln a} = \ln a \cdot a^x$$

4) Ableitung von $f(x) = \log_a x$

Anwendung der Ableitungsregel für Umkehrfunktionen:

$$f'(x) = \frac{1}{\ln a \cdot a^{\log_a x}} = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$$

4. *Differenzierbarkeit und Stetigkeit*

a) Aus der Differenzierbarkeit folgt die Stetigkeit

Beweis: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiere. Da der Nenner gegen 0 strebt, muss der Zähler ebenfalls gegen 0 streben (ansonsten würde der Grenzwert nicht existieren. Der Zähler strebt aber dann gegen 0, wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, d.h. die Funktion f ist stetig an der Stelle x_0. Die Stetigkeit ist also notwendig für die Differenzierbarkeit.

b) Klassifikation von Unstetigkeitsstellen, d.h. von Stellen, an denen eine Funktion nicht differenzierbar ist (hier immer $x_0 = 0$):

1. Isolierter Punkt mit endlicher Sprungstelle:

$$f(x) = sign(x) = \begin{cases} -1 & \text{für} \quad x < 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \\ 1 & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$$

2. Isolierter Punkt mit unendlicher Sprungstelle:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für} \quad x < 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{für} \quad x > 0 \end{cases} \quad \text{oder} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

3. Ecke:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für} \quad x < 0 \\ 1 & \text{für} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

4. Unendlich viele Schwankungen in der Umgebung von x_0:

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

Der Graph schwankt in jeder Umgebung von x_0 unendlich oft zwischen -1 und 1.
Beweis:

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} \cdot (4n+1)} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = 0 \wedge \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} \sin(\frac{\pi}{2} \cdot (4n+1)) = \lim_{n \to \infty}(1) = 1$$

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} \cdot (4n-1)} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = 0 \wedge \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} \sin(\frac{\pi}{2} \cdot (4n-1)) = \lim_{n \to \infty}(-1) = -1$$

5. Unendlich viele Sprünge in jeder Umgebung von x_0:

$$f(x)=\begin{cases}1 \; für \; x\in Q,\\ 0 \; für \; x\notin Q\end{cases}$$ (Dirichlet-Funktion)

c) Aus der Stetigkeit folgt nicht die Differenzierbarkeit, d.h. die Stetigkeit ist nicht hinreichend für die Differenzierbarkeit:

1. f(x) = |x|, x_0 = 0. An einem Knick lässt sich keine Tangente anlegen
2. $$(x)=\begin{cases}-\sqrt{-x} & für \; x<0\\ \sqrt{x} & für \; x\geq 0\end{cases}$$
   An der Stelle 0 verläuft die Tangente senkrecht. An dieser Stelle ist also keine Steigung definiert.
3. $$f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} & für \quad x\neq 0\\ 0 & für \quad x=0\end{cases}$$
   f ist stetig an der Stelle 0, da $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(x_0)$.

   f ist an dieser Stelle nicht differenzierbar: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\sin\frac{1}{x}$

   $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ existiert nicht (s.o.).

d) Sonderfälle

1) f(x) = $\begin{cases}x^2 \; für \; x\in Q,\\ 0 \; für \; x\notin Q\end{cases}$

   f ist nur in 0 differenzierbar
2) Beispiel einer Funktion, die nur n-mal stetig differenzierbar ist:

   f(x) = $\begin{cases}-x^{n+1} \; für \; x\leq 0\\ x^{n+1} \; sonst\end{cases}$
3) Beispiel einer Funktion, deren Ableitung unbeschränkt ist:

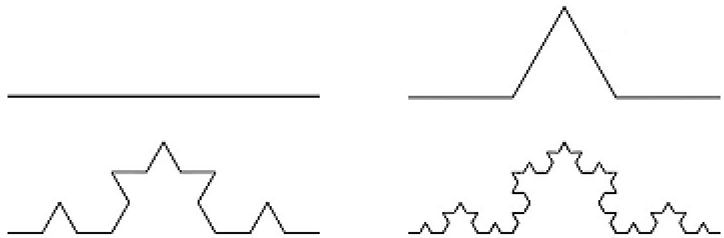
   f(x) = $\begin{cases}x^2\cdot\sin\frac{1}{x^2} \; für \; x\neq 0\\ 0 \; für \; x=0\end{cases}$

   f ist überall differenzierbar, f' ist in jeder Umgebung von 0 unbeschränkt, da

   $$f'\left(\frac{1}{\sqrt{\pi\cdot n}}\right)=(-1)^{n+1}\cdot 2\cdot\sqrt{\pi\cdot n}$$
4) Funktion, die nicht stetig differenzierbar ist:

   f(x) = $\begin{cases}x^2\cdot\sin\frac{1}{x} \; für \; x\neq 0\\ 0 \; für \; x=0\end{cases}$

   f'(0) = 0, was mit Hilfe des Differenzenquotienten zu beweisen ist.
   $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ existiert jedoch nicht.
5) Kurve, die überall stetig, aber nirgendwo "differenzierbar" ist (Koch-Kurve):
   Jede Teilstrecke wird gedrittelt und das mittlere Stück durch eine gleichschenklige Spitze ersetzt. Das Verfahren wird rekursiv fortgesetzt.



6) Funktion, die nirgendwo stetig, also auch nirgendwo differenzierbar ist:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \; \textit{für} \; x \in Q, \\ 0 \; \textit{für} \; x \notin Q \end{cases}$$