Extremwertkriterien

Jürgen Zumdick

1. Definition von Extremstelle (Maximal-, Minimalstelle):
   x_0 heißt Maximalstelle (Minimalstelle) von f, wenn es eine Umgebung $U(x_0)$ gibt, so dass $f(x_0) \geq f(x)$ $(f(x_0) \leq f(x))$ für alle $x \in U(x_0)$.

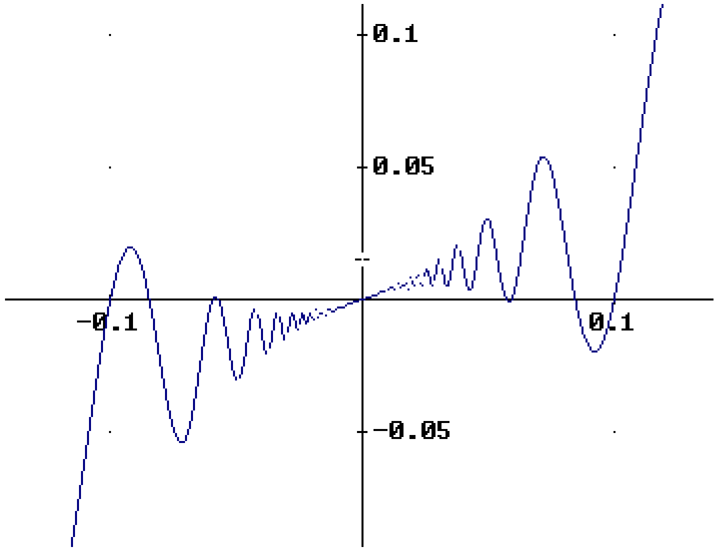
   Es wird $\geq$ bzw. $\leq$ gewählt, weil sonst Funktionen der folgenden Art keine Extremstellen besäßen:
   $$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ für } x \leq 0 \\ 0 \text{ für } 0 < x < 1 \\ (x-1)^2 \text{ für } 1 \leq x \end{cases}$$

2. Ausgangssituation: Graphen von f und f‘ in demselben Koordinatensystem
   Beobachtung: Extremum bei $x_0 \Rightarrow$ 1. $f'(x_0) = 0$
   2. Vorzeichenwechsel von f‘ in $U(x_0)$
   a) Zur 1. Beobachtung
   Auf einen formalen Beweis von 1. sollte verzichtet werden, da der Sachverhalt evident ist und keinerlei Beweisbedürfnis entsteht (Beweismöglichkeit durch Aufstellen des Differenzenquotienten und Betrachtung des links- und des rechtsseitigen Grenzwertes).
   Da Extrema berechnet werden sollen, wird die Umkehrung benötigt. Die Umkehrung ist falsch: Gegenbeispiel $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$.
   Die Begriffe notwendig und hinreichend können eingeführt werden.

   b) Zur 2. Beobachtung
   Die Beobachtung ist nicht verallgemeinerungsfähig. Eine konstante Funktion hat an jeder Stelle ein Extremum, es gibt aber nirgendwo einen Vorzeichenwechsel von f‘. Auch die Abänderung der Definition einer Extremstelle ($\geq$ wird durch > und $\leq$ durch < ersetzt) hilft nicht weiter (Gegenbeispiel s.u.).
   Zur Berechnung von Extrema wird die Umkehrung benötigt. Da $f'(x_0) = 0$ notwendig ist, wird formuliert: $f'(x_0) = 0$ und f‘ hat in $U(x_0)$ einen Vorzeichenwechsel, dann liegt ein Extremum bei x_0 vor.
   Der Beweis kann durch Plausibilitätsbetrachtung am Graphen von f‘ erfolgen oder formal mit Hilfe des Monotoniesatzes.

3. Ausgangssituation: Graphen von f, f‘ und f‘‘ in demselben Koordinatensystem
   Beobachtung: Minimum(Maximum) bei $x_0 \Rightarrow$ 3. $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$)

   Zur 3. Beobachtung
   1) Die Beobachtung ist nicht verallgemeinerungsfähig: $f(x) = x^4$, $x_0 = 0$
   2) Da Extrema berechnet werden sollen, wird die Umkehrung benötigt. Da $f'(x_0) = 0$ notwendig ist, wird formuliert: $f''(x_0) > 0$ und $f'(x_0) = 0 \Rightarrow$ bei x_0 liegt ein Minimum
      Beweis durch Plausibilitätsbetrachtung und Anschauung:
      $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ f‘ steigt in einer Umgebung von x_0 monoton. Wegen $f'(x_0) = 0$ liegt bei x_0 ein Vorzeichenwechsel der Funktion f‘ von - nach + vor $\Rightarrow$ bei x_0 liegt ein Minimum
   3) Analyse: Die Aussage: $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ f‘ steigt in einer Umgebung von x_0 monoton ist falsch.
      Es gilt lediglich der lokale Monotoniesatz:
      f differenzierbar an der Stelle x_0 und $f'(x_0) > 0 \Rightarrow$ Es gibt eine Umgebung $U(x_0)$, so dass in $U(x_0)$ gilt: $x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)$ und $x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$.
      Dass der globale Monotoniesatz nicht gilt, zeigt:
      $$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} + 6x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$
      Stelle $x_0 = 0$



oder:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{für } x\in Q \\ 2x-1 & \text{für } x\notin Q \end{cases}$$

Stelle $x_0 = 1$

Anmerkung: Der globale Monotoniesatz gilt jedoch, wenn f an der Stelle x_0 stetig differenzierbar ist.

4) Den korrekten Beweis liefert der lokale Monotoniesatz:
Aus $f''(x_0) > 0$ folgt: $x < x_0 \Rightarrow f'(x) < f'(x_0)$ und $x > x_0 \Rightarrow f'(x) > f'(x_0)$.
Da $f'(x_0) = 0$ gilt nun: $x < x_0 \Rightarrow f'(x) < 0$ und $x > x_0 \Rightarrow f'(x) > 0$. Folglich ist das Vorzeichenwechselkriterium anwendbar.

Notwendig und hinreichend

1) Das Vorzeichenwechselkriterium ist nicht notwendig für das Vorliegen eines Extremums

Beispiel 1: $f(x) = c$

Beispiel 2 (als Beispiel für x_0 als einzige Extremstelle in $U(x_0)$):

$$f(x)=\begin{cases} x^2\left(\sin\frac{1}{x}\right)^2 + x^2 & \text{für } x\neq 0 \\ 0 & \text{für } x=0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 2x\left(\sin\frac{1}{x}\right)^2 - 2\cos\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x} + 2x \quad \text{für } x\neq 0 \quad ^{1)}$$

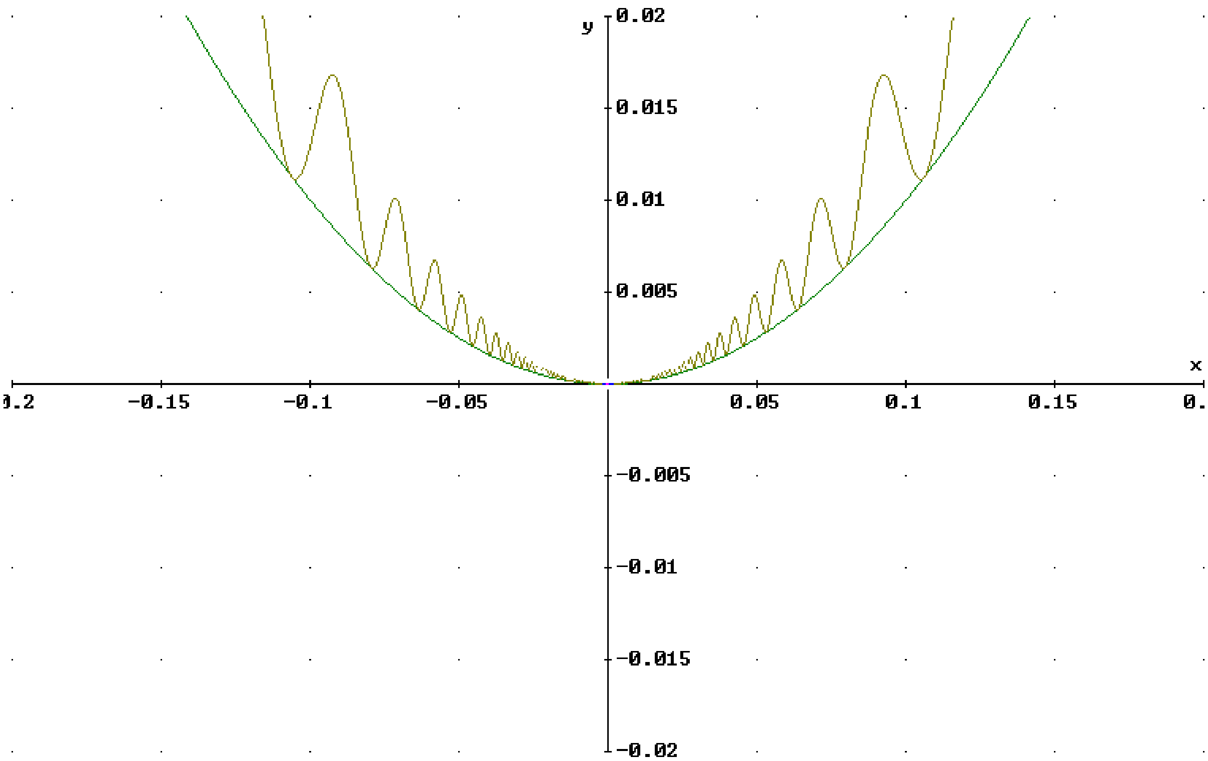
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(\sin\frac{1}{x}\right)^2 + x^2 - 0}{x-0} = \lim_{x\to 0} x\left(\sin\frac{1}{x}\right)^2 + x = 0 \text{, d.h. } f'(0)=0$$

$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ existiert nicht, da der erste und dritte Summand von [1)] gegen 0 streben, der zweite jedoch wegen $2\cos\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x} = \sin\frac{2}{x}$ in jeder Umgebung von 0 unendlich oft zwischen –1 und 1 schwankt.

Ergebnis: f ist in R differenzierbar; f‘ ist an der Stelle 0 nicht stetig und folglich auch nicht differenzierbar. In jeder punktierten Umgebung von 0 wechselt f‘ unendlich oft das Vorzeichen. Wegen der Stetigkeit von f‘ in dieser punktierten Umgebung hat f in dieser Umgebung unendlich viele Maximal- und Minimalstellen.

Nun zur Stelle 0:
Da $f(x) \geq 0$ und $f(0) = 0$, ist 0 Minimalstelle. f ist in R differenzierbar. Das Vorzeichenwechselkriterium ist nicht anwendbar, da f‘ in jeder punktierten Umgebung von 0 unendlich oft das Vorzeichen wechselt. Also ist das Vorzeichenwechselkriterium nicht notwendig.

Das Kriterium mit Hilfe der zweiten Ableitung ist nicht anwendbar, da f‘ an der Stelle 0 nicht differenzierbar ist. Folglich kann die Bestimmung des Minimums mit keinem der Extremwertkriterien erfolgen.



2) $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$ ist nicht notwendig für das Vorliegen eines Extremums: $f(x) = x^4$ und $x_0 = 0$
3) $f'(x_0) = 0$ und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ (n gerade) ist nicht notwendig für das Vorliegen eines Extremums:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

hat bei 0 ein Minimum, jedoch gibt es kein n, so dass obiges Kriterium erfüllt ist.
Beweis:
Ableitungen für $x \neq 0$:

$$f'(x) = e^{-x^{-2}} \cdot 2 \cdot x^{-3}$$

$$f''(x) = e^{-x^{-2}} \cdot 2 \cdot x^{-3} \cdot 2 \cdot x^{-3} + e^{-x^{-2}} \cdot (-6 \cdot x^{-4}) = e^{-x^{-2}} \cdot (4 \cdot x^{-6} - 6 \cdot x^{-4})$$

$$f'''(x) = e^{-x^{-2}} \cdot 2 \cdot x^{-3}(4 \cdot x^{-6} - 6 \cdot x^{-4}) + e^{-x^{-2}} \cdot (-24 \cdot x^{-7} + 24 \cdot x^{-5})$$

$$= e^{-x^{-2}} \cdot (8 \cdot x^{-9} - 36 \cdot x^{-7} + 24 \cdot x^{-5})$$

Vorstehende Rechnungen zeigen, dass sich auch in allen höheren Ableitungen $e^{-x^{-2}}$ ausklammern lässt und dass der 2. Faktor ein Polynom vom Grade 3n mit der Variablen $z = \frac{1}{x}$ ist. Dies wird mit Hilfe der vollständigen Induktion bewiesen:

Induktionsanfang: siehe obige 1. Ableitung
Induktionsschluss:

$$f^{(n)} = e^{-x^{-2}} \cdot P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f^{(n+1)} = e^{-x^{-2}} \cdot 2 \cdot x^{-3} \cdot P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right) + e^{-x^{-2}} \cdot P_{3n}^{'}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= e^{-x^{-2}} \cdot \left(Q_{3(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right) + P_{3n}^{'}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= e^{-x^{-2}} \cdot \left(R_{3(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

wobei $Q_{3(n+1)}$ und $R_{3(n+1)}$ Polynome vom Grade 3(n+1) sind.

Für x = 0 existieren ebenfalls Ableitungen beliebiger Ordnung mit der Eigenschaft $f^{(n)}(0)=0$.
Beweis durch vollständige Induktion:
Induktionsanfang:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^{-2}} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{z\to\infty} \frac{z}{e^{z^2}} = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{e^{z^2} \cdot 2z} = 0$$

(unter Verwendung der Regel von de l'Hospital)
Induktionsschluss:

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^{-2}} \cdot \left(R_{3(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right)\right) - 0}{x}$$

$$= \lim_{z\to\infty} \frac{z}{e^{z^2} \cdot R_{3(n+1)}(z)} = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{e^{z^2} \cdot S_{3(n+2)}(z)} = 0$$

(unter Verwendung der Regel von de l'Hospital und $f^{(n)}(0)=0$)

Übersicht über die Extremwertkriterien		
Kriterium	**notwendig**	**hinreichend**
$f'(x_0) = 0$	ja	nein
$f'(x_0) = 0$ und VZW an der Stelle x_0	nein	ja
$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$	nein	ja
$f'(x_0) = 0$ und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ (n gerade)	nein	ja

Extremwertprobleme

1) Streichholzschachtelaufgabe (Minimierung des Materialverbrauchs bei vorgegebener Länge und vorgegebenem Volumen)
(Gründe, weshalb die Standardschachtel keine optimalen Maße hat: Produktionsbedingungen, Werbefläche, Reibefläche, Verpackungsgründe, optische Gründe)

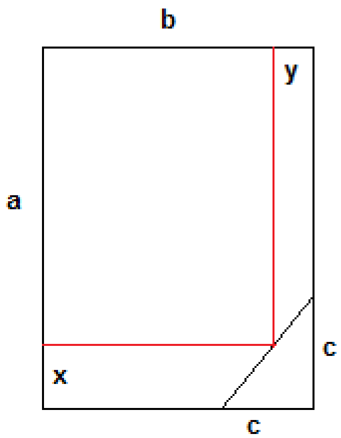
2) Sei das Normalgewicht (in kg) die Maßzahl der Körperlänge (in cm) minus 100. Setzt man die Lebenserwartung bei Normalgewicht mit 100% an und bei x% Übergewicht mit f(x)%, so gilt nach Untersuchungen in den USA für Männer $f(x) = 100 - \frac{x^2}{20} - x$, wenn x zwischen –20 und 30 liegt. Bei wie viel % Übergewicht ist die Lebenserwartung maximal?

Hinweis: Als Maximum ergibt sich (-10/105). Die folgenden Aspekte sollten diskutiert werden. Was bedeutet 105% Lebenserwartung. Welche Lebenserwartung ergibt sich bei 10% Übergewicht? Wie wurden die Funktion und das Intervall ermittelt? Vergleich mit dem Body-Maß-Index.

3) Ein Kugelstoßer stößt eine Kugel mit der Geschwindigkeit v im Winkel φ zur Horizontalen. Die Wurfweite s berechnet sich zu s(φ) = v·sinφ·cosφ. Welches ist der optimale Abwurfwinkel?

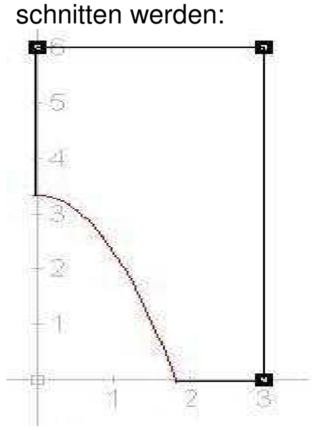
4) Bestimme den Abstand des Punktes P(2/5) von der Geraden g: y = 0,75x + 2
   a) mit Hilfe der Differentialrechnung
   b) mit Hilfe der analytischen Koordinatengeometrie
   c) vektoriell

5) Randmaximum:
Von einer rechteckigen Glasplatte ist in einer Ecke ein dreieckiges Stück abgeschlagen. Aus dem Rest soll ein möglichst großes Rechteck ausgeschnitten werden.



Als Zielfunktion ergibt sich: f(x) = (a – x)(b – c + x) und dem Definitionsbereich [0; c]. Es handelt sich um eine nach unten geöffnete Parabel. Deren Scheitelpunkt außerhalb des Definitionsbereiches liegen kann. Das lokale Maximum ist $x_m = \frac{a-b+c}{2}$. Ist $x_m \leq 0\ (a \leq c-b)$, dann liegt ein Maximum am linken Rand des Definitionsbereiches. Ist $x_m \geq c\ (a-b \geq c)$, dann liegt ein Maximum am rechten Rand des Definitionsbereiches.

6) Randmaximum und Randminimum:
Aus einer rechteckigen Glasscheibe mit den Maßen 3 und 6 ist eine Ecke abgebrochen. Der Rand dieser Ecke kann durch den Graphen mit der Gleichung $f(x) = x^2 + \frac{10}{3}$ beschrieben werden. Aus der restlichen Glasscheibe soll eine möglichst große neue rechteckige Scheibe geschnitten werden:



7) Einem gleichseitigen Dreieck wird ein Rechteck einbeschrieben. Wie ist das Rechteck zu wählen, damit es extremalen Flächeninhalt/extremalen Umfang hat? Die Figur mit den jeweils extremalen

Rechtecken rotiere um die Symmetrieachse. Hat der entstehende Zylinder extremales Volumen/extremale Oberfläche?

8)

> **IC Kurierdienst**
> Für Sendungen, deren Länge und Umfang insgesamt 2 m nicht überschreiten, wobei die Länge nicht mehr als 1 m betragen darf. Höchstgewicht pro Stück 10 kg.
> Deutsche Bundesbahn

Welche Form ergibt ein maximales Volumen?

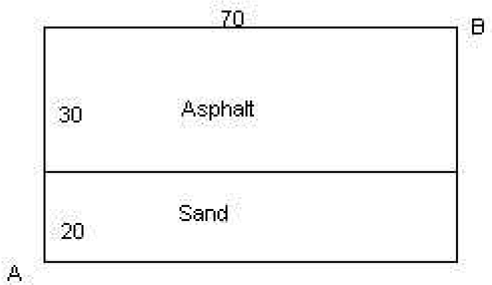
1. Zylinderförmige Sendung:
   a) Als Umfang wird der Umfang des Kreises interpretiert, als Länge die Höhe des Zylinders:
   Extremalbedingung: $V = \pi r^2 \cdot h$
   Nebenbedingung: $2 \cdot \pi \cdot r + h = 2$
   Das maximale Volumen ergibt sich für r = 21,2 cm und h = 66,7 cm: V = 94,3 dm^3
   Die Transportbedingungen sind erfüllt.
   b) Als Umfang wird der Umfang des Kreises interpretiert, als Länge der Durchmesser des Kreises:
   $2 \cdot \pi \cdot r + 2r = 2$
   Es folgt r = 24,1 cm und somit h = 48, 2 cm (lt. Bedingungen muss 2r die längste Seite sein). Als Volumen ergibt sich V = 87,9 dm^3
   c) Als Umfang wird interpretiert U = 4r + 2h und als Länge h
   Das maximale Volumen ergibt sich für r = 33,3 cm und h = 22,2 cm: V = 77,6 dm^3
   d) Als Umfang wird interpretiert U = 4r + 2h und als Länge 2r
   Das maximale Volumen ergibt sich für r = 22,2 cm und h = 33,3 cm: V = 51,7 dm^3
2. Würfelförmige Sendung:
   5a = 2, also a = 40 cm und damit V = 64 dm^3. Die Transportbedingungen sind erfüllt.
3. Quaderförmige Sendung mit genau zwei Quadraten als Seitenflächen (a sei die Quadratseite)
   a) Als Umfang wird der Umfang der quadratischen Seitenfläche interpretiert, als Länge die Länge der nicht quadratischen Seite
   Extremalbedingung:
   Nebenbedingung:4a + b = 2
   Das maximale Volumen ergibt sich mit a = 33,3 cm und b = 66,7 cm: V = 74,1 dm^3
   Die Transportbedingungen sind erfüllt.
   b) Als Umfang wird der Umfang der quadratischen Seite interpretiert, als Länge die Länge der Quadratseite
   5a = 2, also a = 40 cm und somit wegen der Transportbedingungen auch b = 40 cm. Es liegt Fall 2 vor
   c) Als Umfang wird der Umfang der nicht quadratischen Seite interpretiert, als Länge die nicht quadratische Seite
   Extremalbedingung:
   Nebenbedingung: 2a + 2b + b = 2
   Das maximale Volumen ergibt sich mit a = 66,7 cm und b = 22,2 cm: V = 98,8 dm^3
   Die Transportbedingungen sind nicht erfüllt, da hier als Länge b interpretiert wurde. Als Länge muss aber die längste Seite aufgefasst werden.
   d) Als Umfang wird der Umfang der nicht quadratischen Seite interpretiert, als Länge ebenfalls die quadratische Seite
   Extremalbedingung:
   Nebenbedingung:2a + 2b + a = 2
   Das maximale Volumen ergibt sich für a = 29,6 cm und b = 55,5 cm. Die Transportbedingungen sind wie bei 2 c) nicht erfüllt.
4. Beliebiger Quader:
   2a + 2b + c = 2. (falls man den Umfang interpretiert als Umfang der Bodenfläche - mit den Maßen a und b – und c als die im Text erwähnte Länge). Man betrachte die Länge c als fest. Das maximale Volumen ergibt sich mit $a = \frac{1}{2} - \frac{c}{4}$ und $b = \frac{1}{2} - \frac{c}{4}$ zu
   V = $\frac{1}{4}c - \frac{c^2}{4} + \frac{c^3}{16}$. Da zwei Flächen quadratisch sind, liegt Fall 3 a) vor und das maximale Volumen ergibt sich für a = b = 33,3 cm und c = 66,7 cm.

Dies ist im Übrigen nachprüfbar, wenn man V als Funktion von c auffasst und die Extrema bestimmt.

Ergebnis der bisherigen Interpretationen::
Die zylinderförmige Sendung erfüllt die Transportbedingungen und hat maximales Volumen.

9) Eine Zuschaueraufgabe aus der WDR-Sendung „Kopf um Kopf“: Aus einem Kreisausschnitt mit vorgegebenem Radius soll ein Kegelmantel gefaltet werden. Wie ist der Mittelpunktswinkel zu wählen, damit der Kegel maximales Volumen hat?

10) Käferaufgabe:
Ein Käfer will von A nach B. Auf Asphalt kann er doppelt so schnell krabbeln wie auf Sand. Welches ist der schnellste Weg?



Lösung:
Gründe, die für eine Behandlung dieser Aufgabe sprechen:
- Modellierung
- Anwendung der Kettenregel
- Vergleich des Rechenaufwands: Vorzeichenwechselkriteriums – Kriterium mit Hilfe der 2. Ableitung
- Keine Standardmethoden zum Gleichungslösen.

Modellannahme:
Der Käfer läuft geradlinig und mit jeweils konstanter Geschwindigkeit auf den beiden Untergründen.
Sei T in Abhängigkeit von x die Zeit, die der Käfer benötigt, um von A nach B zu gelangen und v seine Geschwindigkeit auf Sand. Dann gilt:

$$T(x) = \frac{\sqrt{20^2 + x^2}}{v} + \frac{\sqrt{30^2 + (70-x)^2}}{2v},\ 0 \le x \le 70$$

$$T'(x) = \frac{2x}{2v \cdot \sqrt{20^2 + x^2}} - \frac{2(70-x)}{4v \cdot \sqrt{30^2 + (70-x)^2}}$$

$$T'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x\sqrt{30^2 + (70-x)^2} = (70-x)\sqrt{20^2 + x^2}$$

Fasst man die beiden Seiten der Gleichung als Funktionsterm auf und zeichnet die zugehörigen Graphen mit einem CAS, so lässt sich vermuten, dass 10 eine Schnittstelle ist. Die Probe zeigt, dass 10 obige Wurzelgleichung löst (beide Seiten ergeben den Wert $600 \cdot \sqrt{5}$).
Gibt es weitere Lösungen? Das Quadrieren beider Seiten führt auf die Gleichung;

$$3x^4 - 420x^3 + 17900x^2 + 56000x - 1960000 = 0.$$

Polynomdivision mit (x-10) führt auf die Gleichung: $3x^3 - 390x^2 + 14000x + 196000 = 0$.
Die linke Seite wird als Funktion aufgefasst, von welcher Hoch- und Tiefpunkt sowie der Schnittpunkt mit der y-Achse bestimmt werden. Daraus ist ersichtlich, dass keine weiteren Nullstellen im Bereich $0 \le x \le 70$ liegen.
Aus vorstehenden Überlegungen folgt, dass nur 10 als Nullstelle von T’(x) in Betracht kommt. Da weiterhin T’(0)<0 und T’(70)>0 folgt, dass 10 Minimalstelle ist.