Krümmung des Graphen einer zweimal differenzierbaren Funktion f an einer Stelle x_0 - in einem Punkt $(x_0/f(x_0))$.

Jürgen Zumdick

I. Zugang

Ein Kreis hat in jedem seiner Punkte eine konstante Krümmung. Je größer der Radius r ist, um so kleiner ist die Krümmung. Dies legt folgende vorläufige Definition nahe: Ein Kreis hat in jedem seiner Punkte die Krümmung $\frac{1}{r}$.

Die Krümmung für einen Funktionsgraphen f an einer Stelle sollte mit Hilfe eines best angepassten Kreises K mit der Gleichung

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$$

erfolgen:

1. $(x_0/f(x_0))$ liegt auf K:
   $$(x_0 - x_m)^2 + (f(x_0) - y_m)^2 = r^2 \quad (1)$$

2. Der Mittelpunkt des Kreises liegt auf der Normalen von f im Punkte $(x_0/f(x_0))$:
   Normale von f in $(x_0/f(x_0))$:
   $$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0),$$
   wobei zunächst $f'(x_0) \neq 0$ vorausgesetzt wird.
   Damit ergibt sich:
   $$y_m - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x_m - x_0) \Leftrightarrow (x_m - x_0) = -f'(x_0) \cdot \left(y_m - f(x_0)\right) \quad (2)$$
   Kreis und die Funktion f haben somit auch die gleiche Tangente in $(x_0/f(x_0))$, was bedeutet, dass ihre ersten Ableitungen an der Stelle x_0 übereinstimmen.

3. Auch die zweiten Ableitungen sollten an der Stelle x_0 übereinstimmen (vgl. Taylorpolynome).
   1. Ableitung des Kreises:
   $$2 \cdot (x - x_m) + 2 \cdot (y - y_m) \cdot y' = 0 \Leftrightarrow (x - x_m) + (y - y_m) \cdot y' = 0$$
   2. Ableitung des Kreises:
   $$1 + y' \cdot y' + (y - y_m) \cdot y'' = 0$$
   Da die zweiten Ableitungen an der Stelle x_0 übereinstimmen sollen, folgt:
   $$1 + \left(f'(x_0)\right)^2 + \left(f(x_0) - y_m\right) \cdot f''(x_0) = 0 \quad (3)$$
   (Man beachte, dass wegen 1. die Funktionswerte und wegen 2. die ersten Ableitungen an der Stelle x_0 übereinstimmen).

   Damit (3) erfüllt ist, muss gelten:
   $f''(x_0) < 0 \wedge \left(f(x_0) - y_m\right) > 0$ oder $f''(x_0) > 0 \wedge \left(f(x_0) - y_m\right) < 0$.
   Für $f''(x_0) = 0$ ist die Gleichung nicht erfüllt (dieser Fall wird später untersucht).
   (3) kann umgeformt werden zu:
   $$\left(f(x_0) - y_m\right) = -\frac{1 + \left(f'(x_0)\right)^2}{f''(x_0)} \quad (3')$$

Aus den obigen Gleichungen wird nun der Radius r bestimmt.
(2) in (1) eingesetzt:

$$(f'(x_0))^2 \cdot (f(x_0) - y_m)^2 + (f(x_0) - y_m)^2 = r^2 \Leftrightarrow (f(x_0) - y_m)^2 \cdot \left((f'(x_0))^2 + 1\right) = r^2$$

$$\Leftrightarrow (f(x_0) - y_m) = \pm \frac{r}{\sqrt{(f'(x_0))^2 + 1}} \quad (4)$$

Mit (3') und (4) wird nun das Gleichsetzungsverfahren durchgeführt. Dabei ist eine Fallunterscheidung durchzuführen:

a) $f''(x_0) < 0$. Dann ist wegen der Anmerkung unter 3. die positive Lösung in (4) zu wählen und es folgt:

$$\frac{r}{\sqrt{(f'(x_0))^2 + 1}} = -\frac{1 + (f'(x_0))^2}{f''(x_0)} \Leftrightarrow \frac{1}{r} = -\frac{f''(x_0)}{\sqrt{1 + (f'(x_0))^2}^3}$$

b) $f''(x_0) > 0$. Wegen der Anmerkung unter 3. muss die negative Lösung gewählt werden. Es folgt:

$$\frac{1}{r} = \frac{f''(x_0)}{\sqrt{1 + (f'(x_0))^2}^3}$$

Insgesamt folgt:

$$\frac{1}{r} = \frac{|f''(x_0)|}{\sqrt{1 + (f'(x_0))^2}^3} \quad (5)$$

Es müssen nun noch die bisher nicht betrachteten Sonderfälle untersucht werden.

a) $f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) \neq 0$:Die Normale ist dann eine Parallele zur y-Achse und es gilt:

$r = |f(x_0) - y_m|$. Aus (3') folgt dann $r = \frac{1}{|f''(x_0)|}$. Dies stimmt aber mit (5) für den Fall $f'(x_0) = 0$ überein.

b) Da die Forderung in (3) nicht erfüllt werden kann, wenn $f''(x_0) = 0$, gelten die obigen Herleitungen nur für den Fall $f''(x_0) \neq 0$.

In Anlehnung an Links- und Rechtskrümmung eines Funktionsgraphen in einem Intervall ist es sinnvoll, nicht nur positive Krümmungen zuzulassen. Da die rechte Seite von (5) auch für $f''(x_0) = 0$ definiert ist, ergibt sich schließlich als Definition für die Krümmung k:

$$k = \frac{f''(x_0)}{\sqrt{1 + (f'(x_0))^2}^3}$$

Das Vorzeichen von k hängt nur von $f''(x_0)$ ab: Für k > 0 hat man eine Linkskrümmung und für k < 0 eine Rechtskrümmung. Liegt ein Wendepunkt vor, so ist k = 0. Aus k = 0 kann natürlich nicht geschlossen werden, dass ein Wendepunkt vorliegt (vgl. $f(x) = x^4$, $x_0 = 0$).

II. Zugang

Vorausgesetzte Kenntnisse:

Ableitung der arctan-Funktion: $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Bogenlänge: $s = \int \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$ und somit $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}$

Von zwei Bogenstücken mit gleicher Länge ist dasjenige stärker gekrümmt, bei dem der Steigungswinkel der Tangente die größere Änderung erfährt. Umgekehrt ist von zwei Bogenstücken mit gleicher Änderung des Steigungswinkels der Tangente dasjenige stärker gekrümmt, welches die kleinere Bogenlänge hat. Daher bietet es sich an, als Maß für Krümmung des Graphen von f in einem Punkt den Quotienten $k = \frac{\textit{Änderung des Anstiegswinkels der Tangente}}{\textit{Änderung der Bogenlänge}} = \frac{d\alpha}{dx} : \frac{ds}{dx}$ zu wählen.

Da $\alpha = \arctan(f'(x))$ folgt nach der Kettenregel: $\frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{1+\left(f'(x)\right)^2} \cdot f''(x)$. Somit ergibt sich $k = \left(\frac{1}{1+\left(f'(x)\right)^2} \cdot f''(x)\right) : \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2} = \frac{f''(x)}{\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}^{\,3}}$