Lotto-Spiel

(Wahrscheinlichkeiten für 6 aus 49 mit/ohne Zusatzzahl und mit/ohne Superzahl)

Jürgen Zumdick

6 aus 49:

Aus 49 durchnummerierten Kugeln werden 6 Kugeln ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge gezogen

Mit Zusatzzahl:

Aus den restlichen 43 Kugeln wird zusätzlich eine weitere Kugel gezogen.

Mit Superzahl:

Aus 10 durchnummerierten Kugeln (0 bis 9) wird zusätzlich eine Kugel gezogen.

1. **Ziehen von 6 Kugeln**

   X: Anzahl der Richtigen

   $$p(X = k) = \frac{\binom{6}{k} \cdot \binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}}$$

Anzahl der Richtigen	Möglichkeiten
6	$\binom{6}{6} \cdot \binom{43}{0}$=1
5	$\binom{6}{5} \cdot \binom{43}{1}$=258
4	$\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2}$=13.545
3	$\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3}$=246.820
2	$\binom{6}{2} \cdot \binom{43}{4}$=1.851.150
1	$\binom{6}{1} \cdot \binom{43}{5}$=5.775.588
0	$\binom{6}{0} \cdot \binom{43}{6}$=6.096.454
	Summe: $\binom{49}{6}$=13.983.816

(Von den 6 gezogenen Zahlen muss der Spieler k Zahlen und von den übrigen nicht gezogen 43 Zahlen muss er 6 – k Zahlen getippt haben)

Zur Information:

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ (Binomialkoeffizient)

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \quad und \quad 0! = 1$ (Fakultät)

2. **Ziehen von 6 Kugeln und einer Zusatzzahl**

   X: Anzahl der Richtigen (mit oder ohne Zusatzzahl)

   Y: Anzahl der Richtigen mit Zusatzzahl

   Z: Anzahl der Richtigen ohne Zusatzzahl

   a) Der Zufallsprozess wird aus der Sicht des Tippers betrachtet, der 6 Kreuze macht:

p(X = k) wie 1.

$$p(Y = k) = \frac{\binom{6}{k} \cdot \binom{42}{5-k} \cdot 1}{\binom{49}{6}}$$

(Von den 6 zuerst gezogenen Zahlen muss er k Zahlen haben, von den 42 nicht gezogenen Zahlen muss er 5-k Zahlen haben, als 6.Zahl muss er die gezogene Zusatzzahl haben)

$$p(Z = k) = \frac{\binom{6}{k} \cdot \binom{42}{6-k}}{\binom{49}{6}}$$

(Von den 6 zuerst gezogenen Zahlen muss er k Zahlen haben, von den 42 nicht gezogenen Zahlen muss er 6-k Zahlen haben – folglich hat er die gezogene Zusatzzahl nicht)

p(X = k) = p(Y = k) + p(Z = k)

Anzahl der Richtigen	Möglichkeiten
6	1
5 mit Zusatzzahl	6
5 ohne Zusatzzahl	252
4 mit Zusatzzahl	630
4 ohne Zusatzzahl	12.915
3 mit Zusatzzahl	17.220
3 ohne Zusatzzahl	229.600
2 mit Zusatzzahl	172.200
2 ohne Zusatzzahl	1.678.950
1 mit Zusatzzahl	671.580
1 ohne Zusatzzahl	5.104.008
0 mit Zusatzzahl	850.668
0 ohne Zusatzzahl	5.245.786
	Summe: $\binom{49}{6}$=13.983.816

b) Der Zufallsprozess wird aus der Sicht der Lotto-Gesellschaft betrachtet, die 7 Zahlen zieht. Der Zufallsversuch wird in einen zweistufigen Versuch zerlegt (Ziehen von 6 Zahlen, Ziehen einer Zahl:

Anzahl der möglichen Fälle: $\binom{49}{6} \cdot \binom{43}{1}$ (43 Möglichkeiten für die Zusatzzahl)

$$p(X = k) = \frac{\binom{6}{k} \cdot \binom{43}{6-k} \cdot \binom{43}{1}}{\binom{49}{6} \cdot \binom{43}{1}}$$

Der Zufallsprozess besteht aus dem Ziehen von 7 Kugeln. Damit der Tipp des Spielers eine Teilmenge hiervon ist, muss er auch 7 Kugeln wählen (6 bewertete und eine imaginäre 7. Kugel).

$$p(Y = k) = \frac{\binom{6}{k} \cdot \binom{42}{5-k} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{43}{1}}{\binom{49}{6} \cdot \binom{43}{1}}$$

(Von den 6 zuerst gezogenen Zahlen muss der Spieler k Zahlen haben, von den 42 nicht gezogenen Zahlen muss er 5-k Zahlen haben, als 6. Zahl muss er die gezogene Zusatzzahl haben, für ein 7., imaginäres Kreuz hat er $\binom{43}{1}$ Möglichkeiten)

$$p(Z = k) = \frac{\binom{6}{k} \cdot \binom{42}{6-k} \cdot \binom{43}{1}}{\binom{49}{6} \cdot \binom{43}{1}}$$

Es ergibt sich natürlich die gleiche Tabelle wie unter 2a)

3. Ziehen von 6 Kugeln mit Zusatzzahl und einer Superzahl

Der Zufallsprozess wird aus der Sicht des Tippers betrachtet, der 6 Kreuze macht und einen Tippschein mit einer Registrierungsnummer wählt/erhält. Die letzte Ziffer der Registrierungsnummer entspricht der Superzahl. Der Zufallsversuch hat jetzt $\binom{49}{6} \cdot 10$ = 139.838.160 verschiedene Ausfälle.

Für den Ausfall 6 Richtige mit Superzahl gibt es eine Möglichkeit und für den Ausfall 6 Richtige ohne Superzahl gibt es 1·9 Möglichleiten (1 Möglichkeit für 6 Richtige, 9 Möglichkeiten für die falsche Superzahl).
Da für alle anderen Ausfälle lt. Spielregel die Superzahl keine Rolle spielt, gibt es für diese Ausfälle jeweils 10-mal so viele Ausfälle wie in der Tabelle bei 2a):

SZ: Superzahl; ZZ. Zusatzzahl

Gewinnklasse	Anzahl der Richtigen	Möglichkeiten
1	6 mit SZ	1
2	6 ohne SZ	9
3	5 mit ZZ	60
4	5 ohne ZZ	2.520
5	4 mit ZZ	6.300
6	4 ohne ZZ	129.150
7	3 mit ZZ	172.200
8	3 ohne ZZ	2.296.000
	2 mit ZZ	1.722.000
	2 ohne ZZ	16.789.500
	1 mit ZZ	6.715.800
	1 ohne ZZ	51.040.080
	0 mit ZZ	8.506.680
	0 ohne ZZ	52.457.860
		Summe: 139.838.160

Aus vorstehender Tabelle lassen sich die Gewinnwahrscheinlichkeiten für die einzelnen Gewinnklassen angeben:

Gewinnklasse	Wahrscheinlichkeit
1	$\frac{1}{139.838.160}$
2	$\frac{9}{139.838.160} \approx \frac{1}{15.537.573}$
3	$\frac{60}{139.838.160} = \frac{1}{2.330.636}$
4	$\frac{2.520}{139.838.160} \approx \frac{1}{55.491}$
5	$\frac{6.300}{139.838.160} \approx \frac{1}{22.197}$
6	$\frac{129.150}{139.838.160} \approx \frac{1}{1.083}$
7	$\frac{172.200}{139.838.160} \approx \frac{1}{812}$
8	$\frac{2.296.000}{139.838.160} \approx \frac{1}{61}$

4. Ziehen von 6 Kugeln und einer Superzahl (Variante ab Mai 2013)

Die Ziehung der Zusatzzahl entfällt. Damit gibt es ebenfalls 139.838.160 Ausfälle
Ist X die Anzahl der Richtigen mit Superzahl und Y die Anzahl der Richtigen ohne Superzahl, dann gilt:

P(X=k)= $\frac{\binom{6}{k}\cdot\binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}\cdot 10}\cdot 1$ und P(Y=k)= $\frac{\binom{6}{k}\cdot\binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}\cdot 10}\cdot 9$

Gewinnklasse	Anzahl der Richtigen	Möglichkeiten
1	6 mit SZ	1
2	6 ohne SZ	9
3	5 mit SZ	258
4	5 ohne SZ	2.322
5	4 mit SZ	13.545
6	4 ohne SZ	121.905
7	3 mit SZ	246.820
8	3 ohne SZ	2.221.380
9	2 mit SZ	1.851.150
	2 ohne ZZ	16.660.350
	1 mit SZ	5.775.588
	1 ohne SZ	51.980.292
	0 mit SZ	6.096.454
	0 ohne SZ	54.868.086
		Summe: 139.838.160

Nun lassen sich die Gewinnwahrscheinlichkeiten für die einzelnen Gewinnklassen angeben:

Gewinnklasse	Wahrscheinlichkeit
1	$\frac{1}{139.838.160}$
2	$\frac{9}{139.838.160} \approx \frac{1}{15.537.573}$
3	$\frac{258}{139.838.160} = \frac{1}{542.008}$
4	$\frac{2.322}{139.838.160} \approx \frac{1}{60.223}$
5	$\frac{13.545}{139.838.160} \approx \frac{1}{10.324}$
6	$\frac{121.905}{139.838.160} \approx \frac{1}{1.147}$
7	$\frac{246.820}{139.838.160} \approx \frac{1}{567}$
8	$\frac{2.221.380}{139.838.160} \approx \frac{1}{63}$
9	$\frac{1.851.150}{139.838.160} \approx \frac{1}{76}$

5. **Aufgabe**
Von der Lottogesellschaft werden für das neue Lottospiel folgende theoretische Auszahlungsquoten veröffentlicht (bei einem Einsatz von 1,00 € pro Lottoreihe):

Gewinnklasse	Theoretische Quote
1	8.949.642,20 €
2	574.596,50 €
3	10.022,00 €
4	3.340,60 €
5	190,80 €
6	42,40 €
7	20,90 €
8	10,40 €
9	(feste Quote) 5,00€

Als Gesamtgewinnchance wird 1:31 angegeben.

a) Ist die Angabe der Gesamtgewinnchance korrekt?
b) Wie viel Prozent der Auszahlung entfallen auf die einzelnen Gewinnklassen?
c) Welches ist der Erwartungswert der Auszahlung – wie viel Prozent der Einnahmen werden also ausgezahlt?
d) Welche theoretischen Quoten entsprächen den Gewinnwahrscheinlichkeiten (Entsprechen soll bedeuten: Verdoppelt sich die Wahrscheinlichkeit, halbiert sich die Quote – antiproportionaler Zusammenhang)?

Lösung:

a) Die Addition der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Gewinnklassen ergibt:

$$\frac{4.457.390}{139.838.160} \approx \frac{1}{31}$$

b) Die gesamte theoretische Auszahlung beträgt:
1·8.949.642,20 € + 9·574.596,50 € + 258·10.022,00 € +2.322·3.340,60 € +13.545·190,80 € + 121.905·42,40 €+ 246.820·20,90 € + 2.221.380·10,40 € + 1.851.150·5,00 € = **69.733.357,90 €**

Damit ergeben sich folgende prozentualen Auszahlungsquoten:

Gewinnklasse	Auszahlungsquote in %
1	$\frac{8.949.642}{69.733.358} = 12{,}8\%$
2	$\frac{9 \cdot 574.596{,}50}{69.733.358} = 7{,}4\%$
3	$\frac{258 \cdot 10.022{,}50}{69.733.358} = 3{,}7\%$
4	$\frac{2.322 \cdot 3.340{,}60}{69.733.358} = 11{,}1\%$
5	$\frac{13.545 \cdot 190{,}80}{69.733.358} = 3{,}7\%$
6	$\frac{121.905 \cdot 42{,}40}{69.733.358} = 7{,}4\%$
7	$\frac{246.820 \cdot 20{,}90}{69.733.358} = 7{,}4\%$
8	$\frac{2.221.380 \cdot 10{,}40}{69.733.358} = 33{,}1\%$
9	$\frac{1.851.150 \cdot 5{,}00}{69.733.358} = 13{,}3\%$

c)

$$\frac{69.733.357{,}90}{139.838.160} = 0{,}499$$

Es werden also etwa 50% der Einnahmen ausgezahlt.

d) Bei einer Auszahlung entsprechend den Gewinnwahrscheinlichkeiten müssten in jeder Gewinnklasse 100% : 9 = 11,1% ausgezahlt werden. 11,1% der Auszahlungssumme von 69.733.358 € sind 7.740.402,74 €. Damit ergeben sich folgende theoretische (absolute) Quoten:

Gewinnklasse	Auszahlungsquote in %
1	7.740.402,74 €
2	7.740.402,74 € : 9 = 860.044,75 €
3	7.740.402,74 € : 258 = 30.001,56 €
4	7.740.402,74 € : 2322 = 3.333,51 €
5	7.740.402,74 € :13545 =

	571,46 €
6	7.740.402,74 € :121905 = 63,50 €
7	7.740.402,74 € :246820 = 31,36 €
8	7.740.402,74 € :2.221.380 = 3,48 €
9	7.740.402,74 € :1.851.150 = 4,18 €