Verschiedene Zugänge zu Kreis, Ellipse, Hyperbel, Parabel

Jürgen Zumdick

A. Zugang über Kurven zweiter Ordnung

Die allgemeine Form einer Kurve 2. Ordnung lautet:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \text{ a und c nicht gleichzeitig } 0$$

In dieser Ausarbeitung werden nur die Fälle ohne das gemischte Glied untersucht, d.h. b = 0. Es handelt sich dabei um Kurven, deren Symmetrieachsen parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen.

1. a ≠ 0, c ≠ 0

Das Verfahren der quadratischen Ergänzung liefert dann:

$$ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0 \Leftrightarrow$$

$$a\left(x^2 + \frac{d}{a}x\right) + c\left(y^2 + \frac{e}{c}y\right) = -f \Leftrightarrow$$

$$a\left(x^2 + \frac{d}{a}x + \left(\frac{d}{2a}\right)^2 - \left(\frac{d}{2a}\right)^2\right) + c\left(y^2 + \frac{e}{c}y + \left(\frac{e}{2c}\right)^2 - \left(\frac{e}{2c}\right)^2\right) = -f \Leftrightarrow$$

$$a\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{d}{2a}\right)^2 + c\left(y + \frac{e}{2c}\right)^2 - c\left(\frac{e}{2c}\right)^2 = -f \Leftrightarrow$$

$$a\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 + c\left(y + \frac{e}{2c}\right)^2 = -f + a\left(\frac{d}{2a}\right)^2 + c\left(\frac{e}{2c}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$a\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 + c\left(y + \frac{e}{2c}\right)^2 = -f + \frac{d^2}{4a} + \frac{e^2}{4c} \Leftrightarrow$$

$$\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\left(y + \frac{e}{2c}\right)^2 = -\frac{f}{a} + \frac{d^2}{4a^2} + \frac{e^2}{4ac} \Leftrightarrow$$

$$\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\left(y + \frac{e}{2c}\right)^2 = k \wedge k = -\frac{f}{a} + \frac{d^2}{4a^2} + \frac{e^2}{4ac}$$

1.1 a = c

$$\left(x+\frac{d}{2a}\right)^2+\left(y+\frac{e}{2a}\right)^2=k \wedge k=\frac{d^2+e^2-4af}{4a^2}$$

Ist die k positiv, so erfüllen alle Punkte des **Kreises** mit dem Mittelpunkt $\left(-\frac{d}{2a}/-\frac{e}{2a}\right)$ und dem Radius $\sqrt{\frac{d^2+e^2-4af}{4a^2}}$ die Gleichung.

Ist die k = 0, so ist der **Punk**t $\left(-\frac{d}{2a}/-\frac{e}{2a}\right)$ einzige Lösung. Für k < 0 existiert keine Lösung.

1.2 a ≠ c

$$\left(x+\frac{d}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\left(y+\frac{e}{2c}\right)^2=k$$

1.2.1 k = 0

Haben a, c gleiches Vorzeichen, so ist der **Punkt** $\left(-\frac{d}{2a}/-\frac{e}{2c}\right)$ einzige Lö-sung.

Haben a, c verschiedene Vorzeichen, so sind alle Punkte der **beiden sich im Punkt** $\left(-\frac{d}{2a}/-\frac{e}{2c}\right)$**schneidenden Geraden** mit den Steigungen $\pm\sqrt{\left|\frac{a}{c}\right|}$ Lö-sung.

1.2.2 k ≠ 0

$$\left(x+\frac{d}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\left(y+\frac{e}{2c}\right)^2=k \Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(x+\frac{d}{2a}\right)^2}{\left(\frac{k}{a}\right)}+\frac{\left(y+\frac{e}{2c}\right)^2}{\left(\frac{k}{c}\right)}=1 \wedge k\neq 0$$

Haben k, a und c gleiches Vorzeichen, so erfüllen alle Punkte der **Ellipse** mit dem Mittelpunkt$\left(-\frac{d}{2a}/-\frac{e}{2c}\right)$, der Hauptachse $\sqrt{\frac{k}{a}}$ und der Nebenachse $\sqrt{\frac{k}{c}}$ die Gleichung.

Haben k, a gleiches und c ein anderes Vorzeichen, so lässt sich die letzte Gleichung wie folgt umformen:

$$\frac{\left(x+\frac{d}{2a}\right)^2}{\left|\frac{k}{a}\right|}-\frac{\left(y+\frac{e}{2c}\right)^2}{\left|\frac{k}{c}\right|}=1$$

Es liegt eine in Richtung der x-Achse geöffnete **Hyperbel** mit dem Mittelpunkt $\left(-\frac{d}{2a}/-\frac{e}{2c}\right)$ vor.

Haben k, c gleiches und a ein anderes Vorzeichen, so erhält man

$$-\frac{\left(x+\frac{d}{2a}\right)^2}{\left|\frac{k}{a}\right|}+\frac{\left(y+\frac{e}{2c}\right)^2}{\left|\frac{k}{c}\right|}=1$$

Es handelt sich um eine in Richtung der y-Achse geöffnete **Hyperbel** dem Mittelpunkt $\left(-\frac{d}{2a}/-\frac{e}{2c}\right)$.

Zur Bedeutung von $\sqrt{\left|\frac{k}{a}\right|}$ und $\sqrt{\left|\frac{k}{c}\right|}$ siehe Abschnitt B, Teil d).

2. a ≠ 0, c = 0

$$ax^2+dx+ey+f=0 \Leftrightarrow$$

$$a\left(x^2+\frac{d}{a}x\right)+ey=-f \Leftrightarrow$$

$$a\left(x^2+\frac{d}{a}y+\left(\frac{d}{2a}\right)^2-\left(\frac{d}{2a}\right)^2\right)+ey=-f \Leftrightarrow$$

$$a\left(x+\frac{d}{2a}\right)^2-a\left(\frac{d}{2a}\right)^2+ey=-f \Leftrightarrow$$

$$ey=-a\left(x+\frac{d}{2a}\right)^2+\frac{d^2}{4a}-f \Leftrightarrow$$

$$y=-\frac{a}{e}\left(x+\frac{d}{2a}\right)^2+\frac{d^2-4af}{4ae}\wedge e\neq 0$$

2.1 e ≠ 0

Es handelt sich um eine in Richtung der y-Achse geöffnete **Parabel** mit dem Scheitelpunkt $\left(-\frac{d}{2a}/\frac{d^2-4af}{4ae}\right)$ und dem Streckfaktor $-\frac{a}{e}$.

2.2 e = 0

Aus der vorletzten Gleichung folgt:

$$0=-a\left(x+\frac{d}{2a}\right)^2+\frac{d^2}{4a}-f \Leftrightarrow$$

$$\left(x+\frac{d}{2a}\right)^2=\frac{d^2-4af}{4a^2} \Leftrightarrow$$

$$\left(x+\frac{d}{2a}\right)^2=l \wedge l=\frac{d^2-4af}{4a^2}$$

Ist l = 0, so ist die **Parallele** zur y-Achse durch $\left(-\frac{d}{2a}/0\right)$ Lösung.

Ist l > 0, so erhält man **zwei Parallelen** zur y-Achse durch $\left(\pm\sqrt{l}-\frac{d}{2a}/0\right)$ als

Lösung.
Für l < 0 existiert keine Lösung.

3. a = 0, c ≠ 0

$$cy^2+dx+ey+f=0 \Leftrightarrow$$

$$c\left(y^2+\frac{e}{c}y\right)+dx=-f \Leftrightarrow$$

$$c\left(y^2+\frac{e}{c}y+\left(\frac{e}{2c}\right)^2-\left(\frac{e}{2c}\right)^2\right)+dx=-f \Leftrightarrow$$

$$c\left(y+\frac{e}{2c}\right)^2-c\left(\frac{e}{2c}\right)^2+dx=-f \Leftrightarrow$$

$$x=-\frac{c}{d}\left(y+\frac{e}{2c}\right)^2+\frac{e^2-4cf}{4cd} \wedge d \neq 0$$

3.1 d ≠ 0

Es handelt sich um eine in Richtung der x-Achse geöffnete **Parabel** mit dem Scheitelpunkt $\left(\frac{e^2-4cf}{4cd}/-\frac{e}{2c}\right)$ und dem Streckfaktor $-\frac{c}{d}$.

3.2 d = 0

Aus der vorletzten Gleichung folgt:

$$c\left(y+\frac{e}{2c}\right)^2-c\left(\frac{e}{2c}\right)^2=-f \Leftrightarrow$$

$$\left(y+\frac{e}{2c}\right)^2=\left(\frac{e}{2c}\right)^2-\frac{f}{c} \Leftrightarrow$$

$$\left(y+\frac{e}{2c}\right)^2=\frac{e^2-4cf}{4c^2} \Leftrightarrow$$

$$\left(y+\frac{e}{2c}\right)^2=m \wedge m=\frac{e^2-4cf}{4c^2}$$

Ist m = 0, so ist die **Parallele** zur x-Achse durch $\left(0/-\frac{e}{2c}\right)$ Lösung.

Ist m > 0, so erhält man **zwei Parallelen** zur x-Achse durch $\left(0/\pm\sqrt{m}-\frac{e}{2c}/0\right)$ als Lösung.

Ist m < 0, so existiert keine Lösung

B. Zugang über die Brennpunkteigenschaft

a) Kreis

Gegeben ist ein Brennpunkt (Mittelpunkt). Die Menge aller Punkte P, deren Abstand vom Mittelpunkt M konstant (=r) ist, bildet einen Kreis:

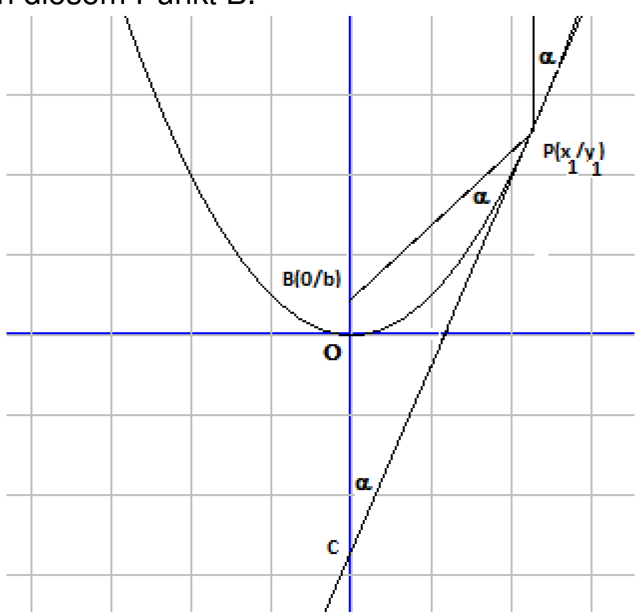
$$\left(\vec{p}-\vec{m}\right)^2 = r^2$$

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ und } \vec{m} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \text{ folgt } (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$$

b) Parabel (Herleitung der Brennpunkteigenschaft)

Gegeben ist eine in Richtung der (positiven) y-Achse geöffnete Parabel ($f(x) = ax^2$). Ein parallel zur y-Achse verlaufender Strahl trifft in $P(x_1/y_1)$ auf die Parabel und wird an der Tangente in P reflektiert. Der reflektierte Strahl schneide die y-Achse im Punkte B(0/b).

Behauptung: Alle reflektierten, parallel zur y-Achse verlaufenden Strahlen schneiden sich in diesem Punkt B.



Beweis:

Wegen des Reflexionsgesetzes (Einfallswinkel = Ausfallswinkel) folgt, dass das Dreieck CPB gleichschenklig ist. Es folgt:

$$|BP| = |CB| \Leftrightarrow \sqrt{x_1^{\,2} + (y_1 - b)^2} = b + |OC| \Rightarrow x_1^{\,2} + (y_1 - b)^2 = (b + |OC|)^2 \quad (*)$$

Gleichung der Tangente durch P:

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow y = 2ax_1 \cdot x - 2ax_1^2 + y_1 \Leftrightarrow y = 2ax_1 \cdot x - 2y_1 + y_1 \Leftrightarrow$$

$$y = 2ax_1 \cdot x - y_1$$

Somit folgt: $|OC| = y_1$. Nach Einsetzen in (*) folgt:

$$x_1^2 + (y_1 - b)^2 = (b + y_1)^2 \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 - 2by_1 + b^2 = b^2 + 2by_1 + y_1^2 \Leftrightarrow x_1^2 = 4by_1 \Leftrightarrow$$

$$x_1^2 = 4bax_1^2 \Leftrightarrow b = \frac{1}{4a}$$

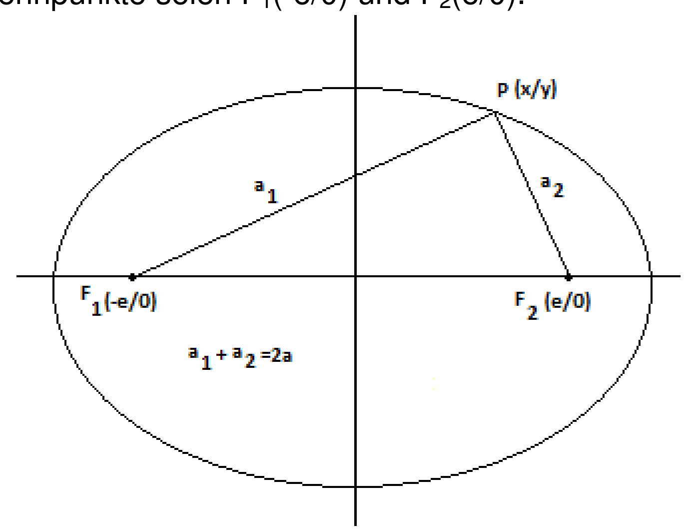
B ist also unabhängig von der speziellen Wahl des Punktes P, d. h. alle reflektierten Strahlen schneiden sich in $\left(0/\frac{1}{4a}\right)$, dem Brennpunkt der Parabel.

Hinweis: Die Tangentengleichung lässt sich auch alternativ über den Ansatz: $m(x - x_1) + y_1 = ax^2$ herleiten (Schnitt einer Geraden durch P mit der Parabel und der Überlegung, dass nur ein Schnittpunkt existieren kann).

c) Ellipse

Gegeben sind zwei Brennpunkte. Die Menge aller Punkte P, deren Abstandssumme von den beiden Brennpunkten konstant (= 2a) ist, bilden eine Ellipse (Gärtnerkonstruktion).

Nachweis:
Die beiden Brennpunkte seien $F_1(-e/0)$ und $F_2(e/0)$.



Es folgt ($\vec{f}$ Ortsvektor von F_2):

$$\left|\vec{p}+\vec{f}\right| + \left|\vec{p}-\vec{f}\right| = 2a \Rightarrow \left|\vec{p}+\vec{f}\right|^2 + 2\left|\vec{p}+\vec{f}\right| \cdot \left|\vec{p}-\vec{f}\right| + \left|\vec{p}-\vec{f}\right|^2 = 4a^2 \Leftrightarrow$$

$$2\left|\vec{p}+\vec{f}\right| \cdot \left|\vec{p}-\vec{f}\right| = 4a^2 - \left(\vec{p}^2 + 2\vec{p}*\vec{f} + \vec{f}^2 + \vec{p}^2 - 2\vec{p}*\vec{f} + \vec{f}^2\right) \Leftrightarrow$$

$$2\left|\vec{p}+\vec{f}\right| \cdot \left|\vec{p}-\vec{f}\right| = 4a^2 - 2\left(\vec{p}^2 + \vec{f}^2\right) \Rightarrow \left(\vec{p}+\vec{f}\right)^2 \cdot \left(\vec{p}-\vec{f}\right)^2 = \left(2a^2 - \left(\vec{p}^2 + \vec{f}^2\right)\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\vec{p}^{\,2}\right)^2 + 2\,\vec{p}^{\,2}\cdot\vec{f}^{\,2} - 4\left(\vec{p} * \vec{f}\right) + \left(\vec{f}^{\,2}\right)^2 = 4a^4 - 4a^2\left(\vec{p}^{\,2} + \vec{f}^{\,2}\right) + \left(\vec{p}^{\,2} + \vec{f}^{\,2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\vec{p}^{\,2}\right)^2 + 2\cdot\vec{p}^{\,2}\cdot\vec{f}^{\,2} - 4\left(\vec{p} * \vec{f}\right)^2 + \left(\vec{f}^{\,2}\right)^2 = 4a^4 - 4a^2\left(\vec{p}^{\,2} + \vec{f}^{\,2}\right) + \left(\vec{p}^{\,2}\right)^2 + 2\,\vec{p}^{\,2}\cdot\vec{f}^{\,2} + \left(\vec{f}^{\,2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$-4\left(\vec{p} * \vec{f}\right)^2 = 4a^4 - 4a^2\left(\vec{p}^{\,2} + \vec{f}^{\,2}\right) \Leftrightarrow -\left(\vec{p} * \vec{f}\right)^2 = a^4 - a^2\left(\vec{p}^{\,2} + \vec{f}^{\,2}\right)$$

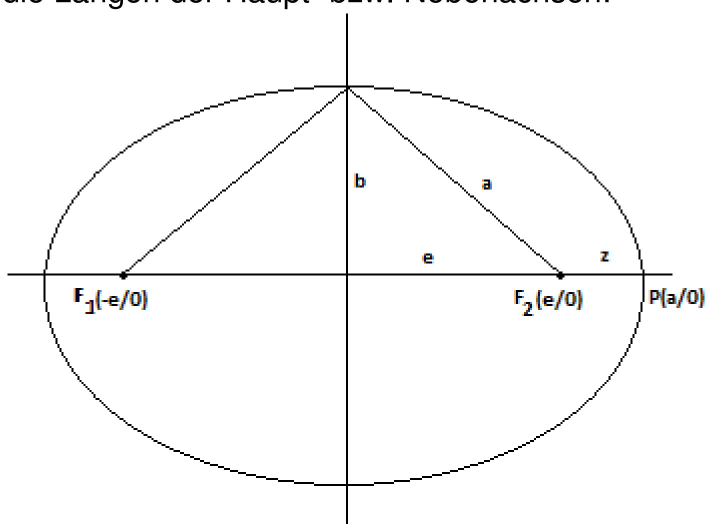
Mit $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *und* $\vec{f} = \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}$ und $b^2 = a^2 - e^2$ folgt:

$$-x^2e^2 = a^4 - a^2(x^2 + y^2 + e^2) \Leftrightarrow \left(a^2 - e^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - e^2\right) \Leftrightarrow$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a und b sind die Längen der Haupt- bzw. Nebenachsen:



$|PF_1| + |PF_2| = 2a \qquad 2e + z + z = 2a \qquad e + z = a$

d) Hyperbel

Gegeben sind zwei Brennpunkte. Die Menge aller Punkte, deren Abstandsdifferenz von den beiden Brennpunkten konstant (=2a) ist, bilden eine Hyperbel.

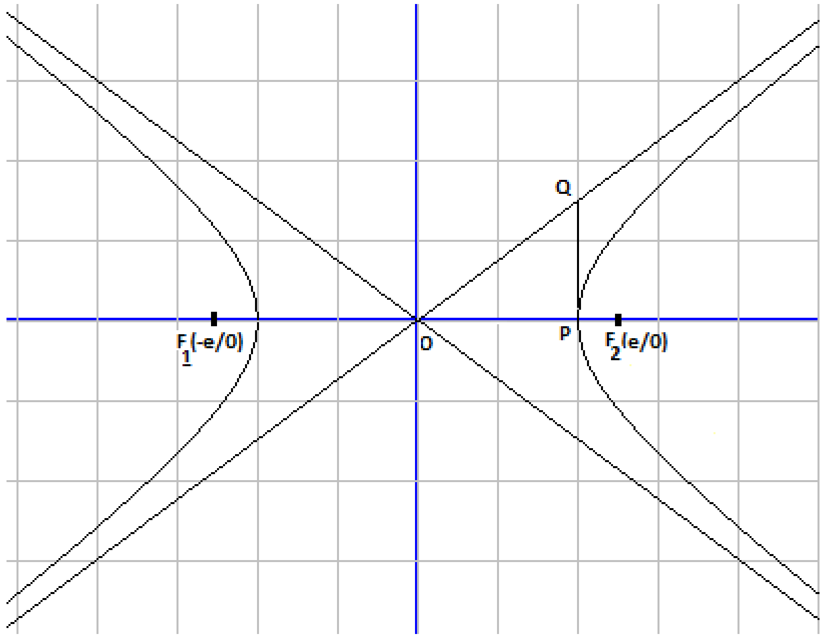
$$\left|\vec{p} + \vec{f}\right| - \left|\vec{p} - \vec{f}\right| = 2a$$

Analog zur Rechnung unter c) folgt ebenfalls:

$$-4\left(\vec{p} * \vec{f}\right)^2 = 4a^4 - 4a^2\left(\vec{p}^{\,2} + \vec{f}^{\,2}\right) \Leftrightarrow -\left(\vec{p} * \vec{f}\right)^2 = a^4 - a^2\left(\vec{p}^{\,2} + \vec{f}^{\,2}\right)$$

Mit $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *und* $\vec{f} = \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}$ und $b^2 = e^2 - a^2$ folgt:

$$-x^2e^2 = a^4 - a^2(x^2 + y^2 + e^2) \Leftrightarrow \left(e^2 - a^2\right)x^2 - a^2y^2 = a^2\left(e^2 - a^2\right) \Leftrightarrow$$
$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \Leftrightarrow$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Die Geraden mit der Gleichung $y = \pm\frac{b}{a}\cdot x$ sind Asymptoten.

Wegen der Konstruktionsbedingung gilt: $|PF_2|$ - $|PF_2|$ = 2a

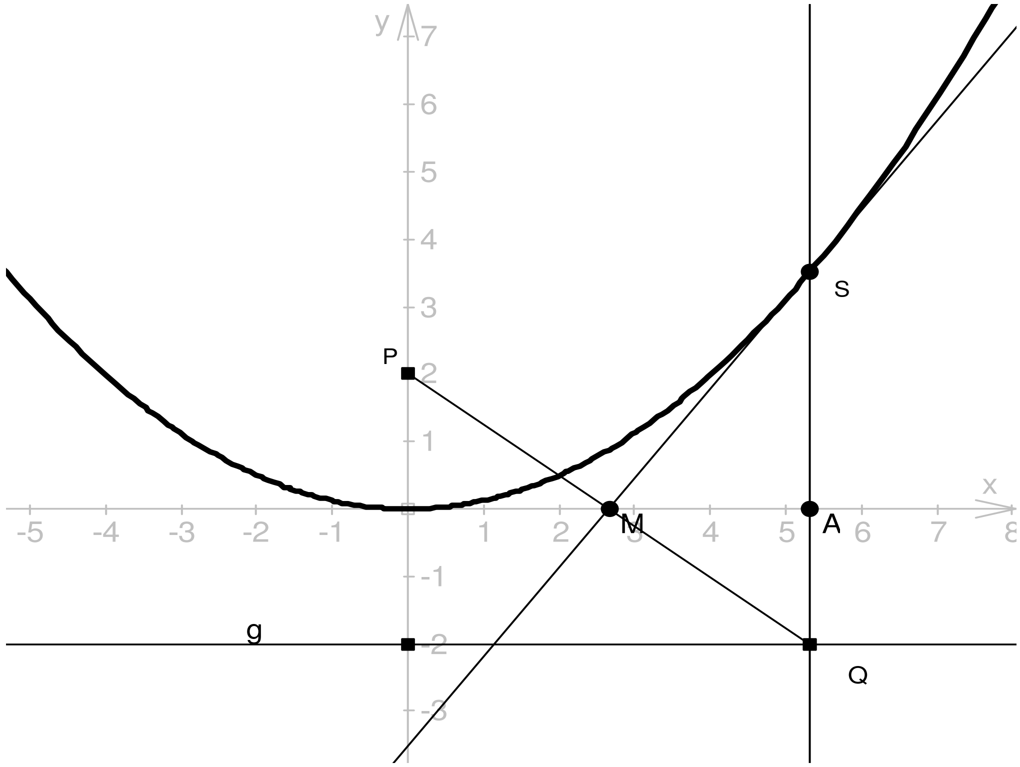
$$\left|PF_1\right| - \left|PF_2\right| = 2a \Leftrightarrow \left|OP\right| + e - (e - \left|OP\right|) = 2a \Leftrightarrow \left|OP\right| = a\,.$$

Aus der Asymptotengleichung folgt: |PQ| = b

C. Zugang über eine Leitgerade

a) Parabel

Die Menge aller Punkte S, die von einem Punkt P (Brennpunkt) und einer Geraden g (Leitgerade) denselben Abstand haben, liegen auf einer Parabel.



Wähle auf g einen Punkt Q. Errichte in Q die Senkrechte auf g. Die Mittelsenkrechte von $\overline{PQ}$ schneidet diese in S. Bewegt man Q auf g, so beschreibt S eine Parabel. Die Mittelsenkrechte ist die Tangente in S an die Parabel.

Beweis: Das Koordinatensystem sei so gewählt, dass der Ursprung das Lot von P auf g halbiert. Es seien: P(0/p) und Q(q/-p).

Steigung von $\overline{PQ}$: $\dfrac{p+p}{0-q} = -\dfrac{2p}{q}$

Steigung der Mittelsenkrechten: $\dfrac{q}{2p}$; Mittelpunkt von $\overline{PQ}$: $M\left(\dfrac{q}{2}/0\right)$

Gleichung der Mittelsenkrechten: $y = \dfrac{q}{2p}\cdot x - \dfrac{q^2}{4p}$

Schnittpunkt der Mittelsenkrechten mit der Senkrechten x = q: $S\left(q/\dfrac{q^2}{4p}\right)$

Gleichung der Ortslinie von S: $f(x) = \dfrac{1}{4p}x^2$ (Parabelgleichung)

Steigung der Ortslinie in S:

1. $f'(q) = \dfrac{2}{4p}\cdot q = \dfrac{q}{2p}$
2. $\dfrac{|AS|}{|AM|} = \dfrac{\frac{q^2}{4p}}{\frac{q}{2}} = \dfrac{q}{2p}$

Somit ist die Mittelsenkrechte Tangente in S an die Parabel.

Alternative vektorielle Herleitung mithilfe der Hesseform:

Abstand des Punktes $S(x/y)$ vom Brennpunkt $P(0/p)$= Abstand des Punktes S von der Leitgeraden ($\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -p \end{pmatrix}$ Ortsvektor, $\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ normierter Normalenvektor der Leitgeraden):

$$\left|\vec{s} - \vec{p}\right| = \left|\vec{n}^0 * \left(\vec{s} - \vec{a}\right)\right| \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y-p \end{pmatrix}^2 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y+p \end{pmatrix}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2yp + p^2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4p}x^2$$

b) Gemeinsame Definition von Parabel, Ellipse und Hyperbel mittels einer Leitgeraden

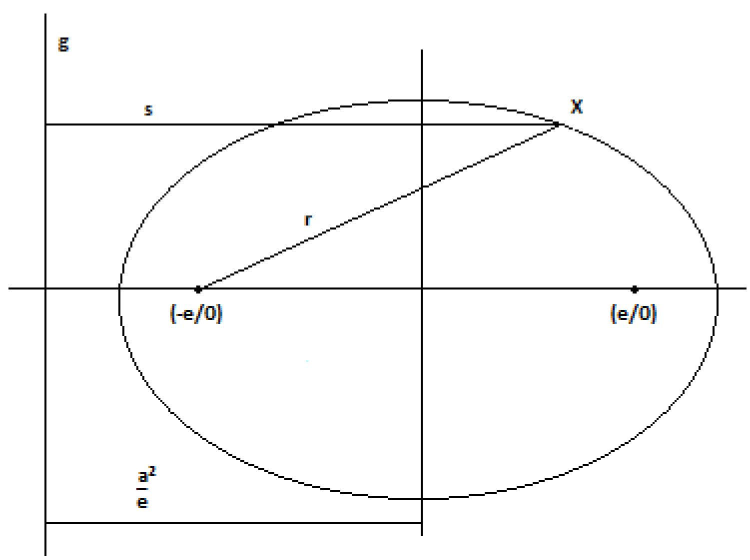
1. Parabel

Spiegelt man die Parabel mit der Gleichung $y = \frac{1}{a} \cdot x^2$ an der Winkelhalbierenden y = x, so erhält man die Gleichung

$y^2 = \frac{1}{a} \cdot x$. Die Leitgerade hat dann die Gleichung $x = -\frac{1}{4a}$ und der Brennpunkt ist $\left(\frac{1}{4a} / 0\right)$.

Jeder Punkt der Parabel hat denselben Abstand vom Brennpunkt und von der Leitlinie. Sei r der Abstand vom Brennpunkt und s der Abstand von der Leitgeraden. Dann gilt $\frac{r}{s} = 1$.

2. Ellipse



Gegeben sei die Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;\ e^2=a^2-b^2$ und eine Gerade g senkrecht zur x-Achse durch $\left(-\frac{a2}{e}/0\right)$. Wegen $\frac{a^2}{e}=\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}>\frac{a^2}{\sqrt{a^2}}=a$ liegt g außerhalb der Ellipse.

Der Punkt X liege im ersten Quadranten (alle anderen Fälle sind aus Symmetriegründen analog). X hat dann die Koordinaten: $\left(x/b\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)$

Abstand des Punktes X von der Geraden g: $s=\frac{a^2}{e}+x=\frac{a^2+xe}{e}$

Abstand des Punktes X vom Brennpunkt F(-e/0):

$$r=\sqrt{(x+e)^2+\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}-0\right)^2}=\sqrt{x^2+2xe+e^2+b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}},$$

$$=\sqrt{x^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)+2xe+a^2},\quad da\quad e^2+b^2=a^2$$

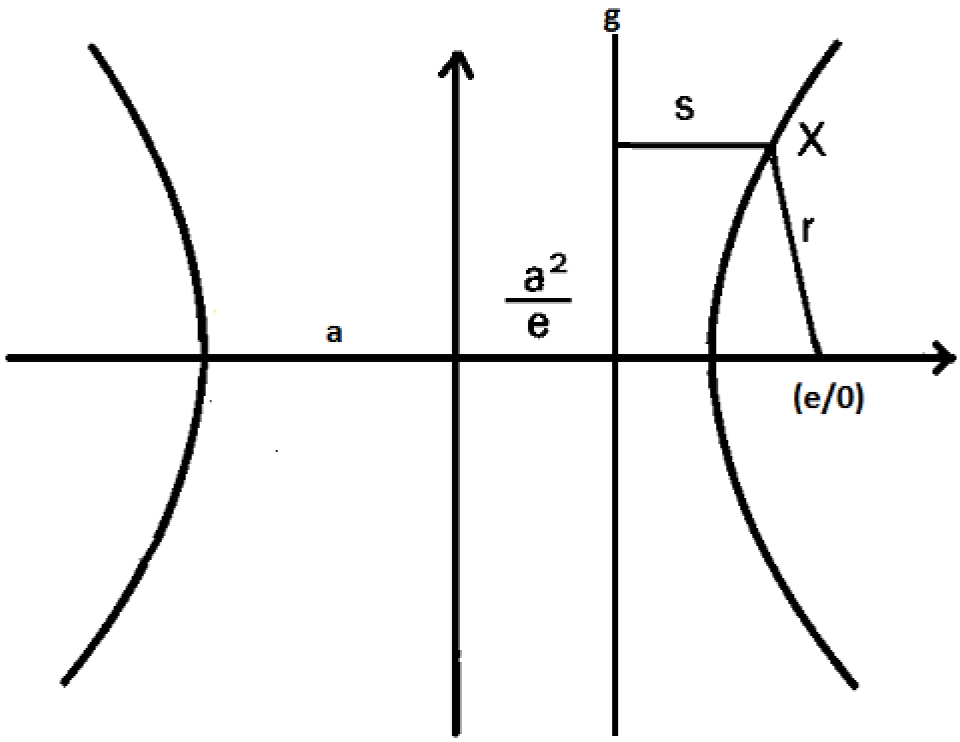
$$r=\sqrt{x^2\frac{e^2}{a^2}+2xe+a^2}=\sqrt{\left(x\frac{e}{a}+a\right)^2}=x\frac{e}{a}+a=\frac{xe+a^2}{a}$$

Es folgt: $\frac{r}{s}=\frac{e}{a}<1$

Aus Analogiegründen gilt dies auch für den 2.Brennpunkt und der Senkrechten durch $\left(\frac{a2}{e}/0\right)$.

3. Hyperbel

Gegeben sei die Hyperbel $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;\ e^2=a^2-b^2$ und eine Gerade g senkrecht zur x-Achse durch $\left(\frac{a2}{e}/0\right)$. Wegen $\frac{a^2}{e}=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}<\frac{a^2}{\sqrt{a^2}}=a$ liegt g außerhalb der Hyperbel.



Der Punkt X liege im ersten Quadranten (alle anderen Fälle sind aus Symmetriegründen analog). X hat dann die Koordinaten: $\left(x / b \cdot \sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right)$

Abstand des Punktes X von der Geraden g: $s = x - \frac{a^2}{e} = \frac{xe - a^2}{e}$

Abstand des Punktes X vom Brennpunkt F(e/0):

$$r = \sqrt{(e-x)^2 + \left(b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right)^2} = \sqrt{e^2 - 2xe + x^2 + \frac{b^2 x^2}{a^2} - b^2}$$

$$= \sqrt{x^2\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right) - 2xe + a^2}, \; da\; e^2 - b^2 = a^2$$

$$r = \sqrt{x^2\frac{e^2}{a^2} - 2xe + a^2} = \sqrt{\left(x\frac{e}{a} - a\right)^2} = x\frac{e}{a} - a = \frac{xe - a^2}{a}$$

Es folgt: $\frac{r}{s} = \frac{e}{a} > 1$

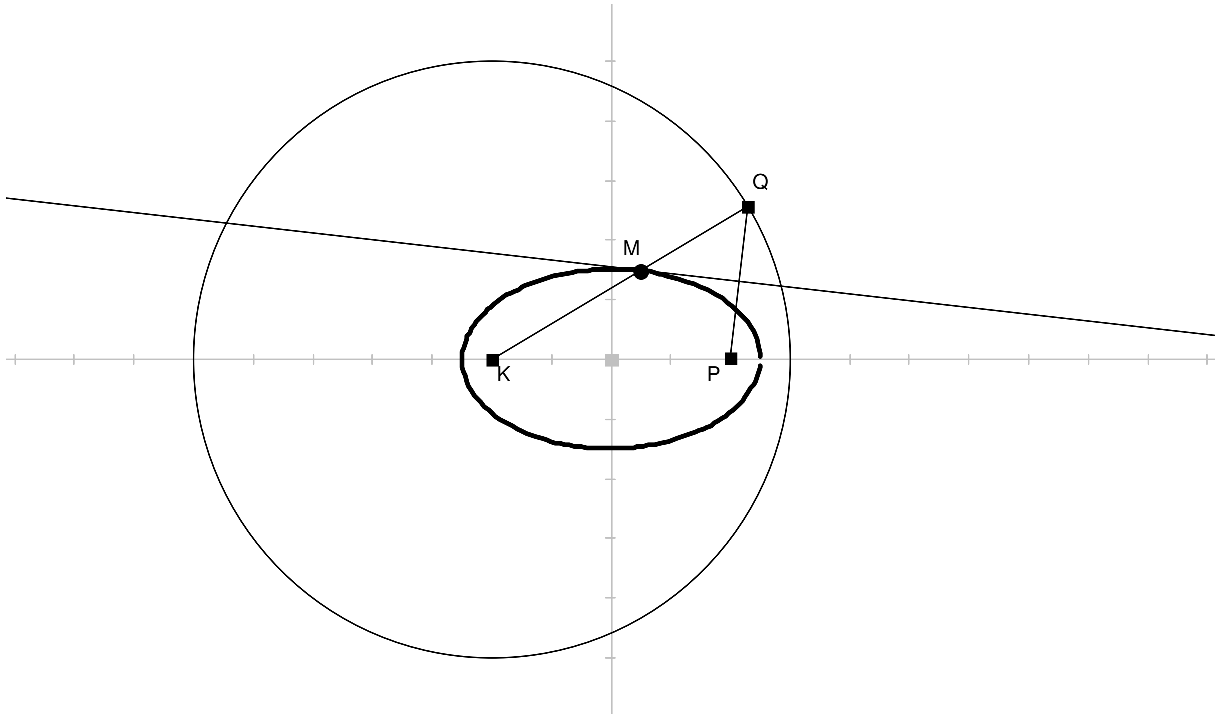
Für den Punkt X auf dem anderen Parabelast und für die andere Leitgerade durch $\left(-\frac{a2}{e} / 0\right)$ lässt sich die Rechnung analog durchführen.

$\frac{e}{a}$ heißt numerische Exzentrizität.

D. Zugang über einen Kreis als Leitlinie

a) Ellipse

Betrachte die Menge aller Punkte M, die von einem Kreis (um K) und einen Punkt P innerhalb des Kreises denselben Abstand haben.



Wähle Q auf dem Kreis. Die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{PQ}$ schneidet die Strecke $\overline{KQ}$ in M. Bewegt man Q auf dem Kreis, so entsteht eine Ellipse. Die Mittelsenkrechte ist die Tangente in M an die Ellipse.

Beweis:

Das Koordinatensystem sei so gelegt, dass der Ursprung der Mittelpunkt von $\overline{KP}$ ist.

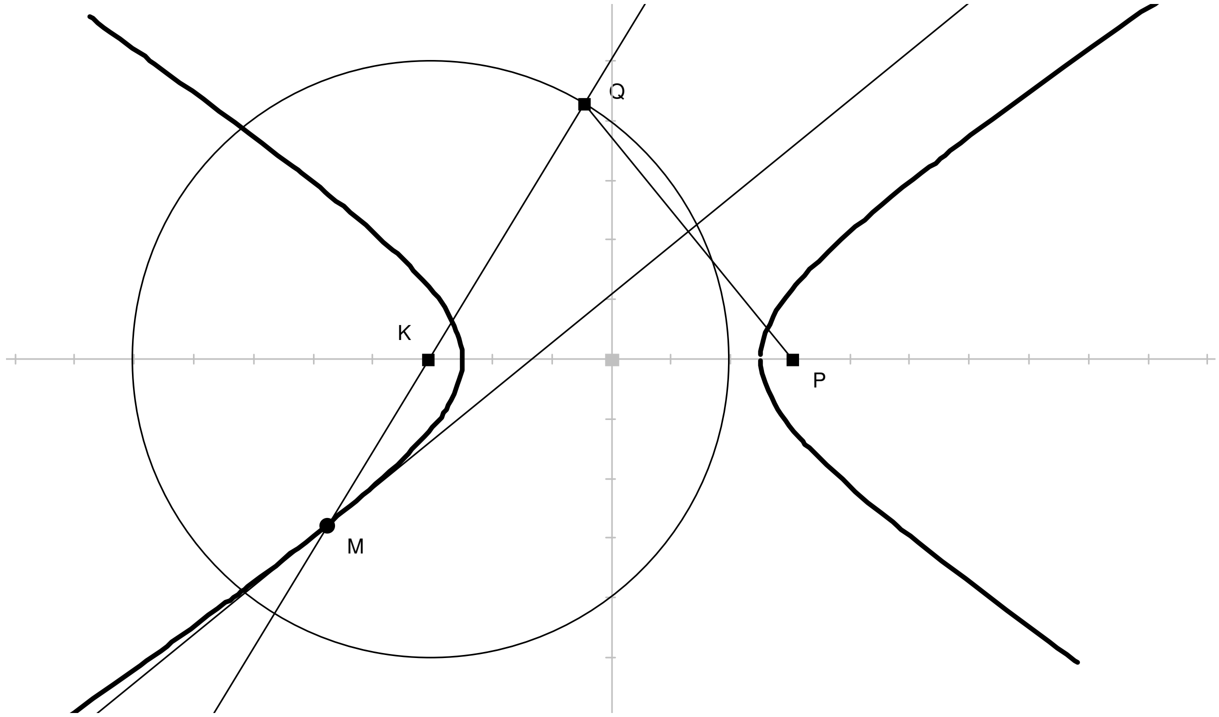
$\overline{MP} = \overline{MQ}; \quad \overline{MK} = r - \overline{MQ};$

$\overline{MK} + \overline{MP} = r - \overline{MQ} + \overline{MQ} = r;$

Damit ist die Bedingung der Gärtnerkonstruktion (Abstandssumme konstant) erfüllt (K und P sind die Brennpunkte).

b) Hyperbel

Betrachte die Menge aller Punkte M, die von einem Kreis (um K) und einen Punkt P außerhalb des Kreises denselben Abstand haben.



Wähle Q auf dem Kreis. Die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{PQ}$ schneidet die Gerade KQ in M. Bewegt man Q auf dem Kreis, so entsteht eine Hyperbel. Die Mittelsenkrechte ist die Tangente in M an die Hyperbel.

Beweis:

Das Koordinatensystem sei so gelegt, dass der Ursprung der Mittelpunkt von $\overline{KP}$ ist.

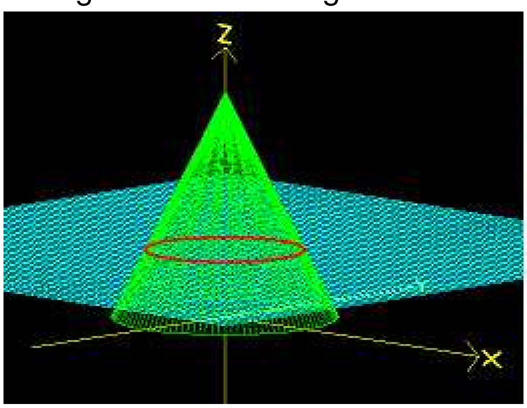
$\overline{MP} = \overline{MQ}; \overline{MQ} = r + \overline{MK};$

$\overline{MP} - \overline{MK} = \overline{MQ} - \overline{MK} = r + \overline{MK} - \overline{MK} = r;$

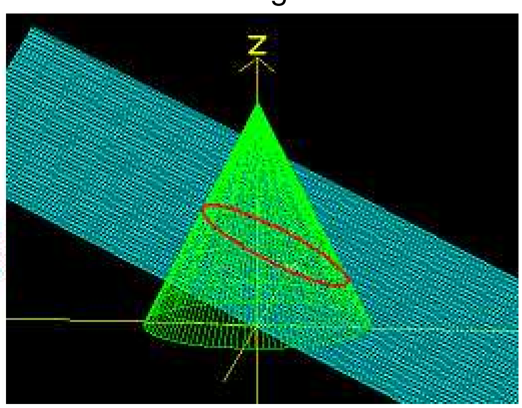
Damit ist die Bedingung der konstanten Abstandsdifferenz erfüllt.

E. Zugang über den Schnitt einer Ebene mit einem Kegel (Doppelkegel)

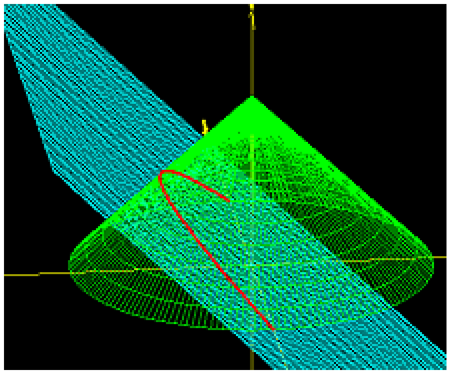
Die folgenden Bilder zeigen die verschiedenen Schnittmöglichkeiten:

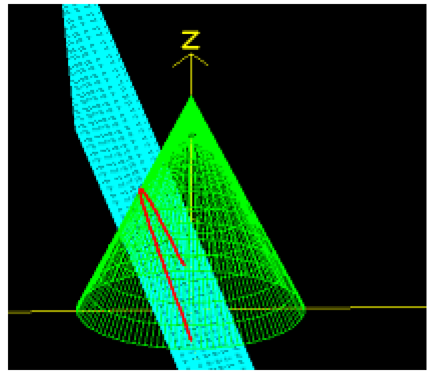


Kreis

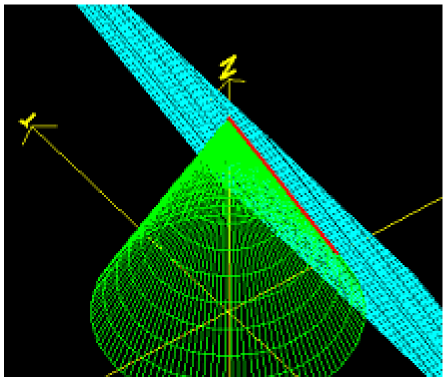


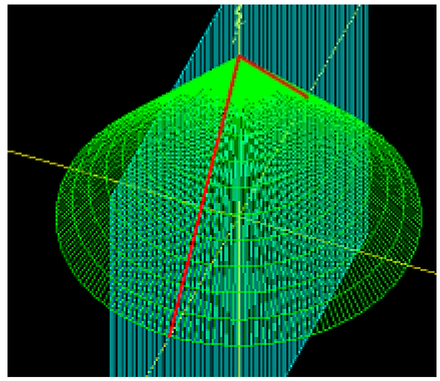
Ellipse





Parabel Hyperbel

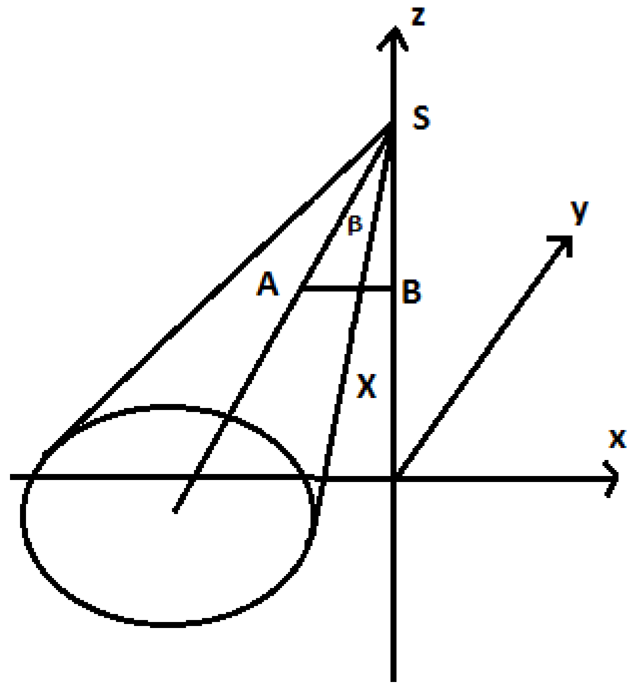




Kante Doppelkante

In der mathematischen Theorie werden unbeschränkte Doppelkegel verwendet, so dass es sich in den letzten beiden Fällen um eine Gerade bzw. Doppelgerade handelt.

Da gezeigt werden soll, dass die Schnittmengen durch die im Abschnitt A untersuchten quadratischen Terme dargestellt werden können, wird als Schnittebene die x-y-Ebene gewählt. Die Spitze S des Kegels sei der Punkt (0/0/s) der z-Achse und die Kegelachse verlaufe in der x-z-Ebene. Durch Variation des Winkels α zwischen Kegelachse und der z-Achse lassen sich die verschiedenen Schnitte erzeugen. $90° - \alpha$ ist dann der Schnittwinkel zwischen der x-y-Ebene und der Kegelachse. Weiterhin sei β ($< 90°$) der halbe Öffnungswinkel des Kegels.



Es sei $\vec{SA} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ 0 \\ -\cos\alpha \end{pmatrix}$. $\vec{SA}$ ist dann ein Richtungsvektor der Kegelachse mit der Länge 1 (siehe rechtwinkliges Dreieck SAB).

Für einen Punkt X des Kegelmantels gilt:

$$\cos\beta = \frac{\vec{SX} * \vec{SA}}{|\vec{SX}| \cdot |\vec{SA}|}$$

Liegt X in der x-y-Ebene, so folgt

$$\cos\beta = \frac{\begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \\ 0-s \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ 0 \\ -\cos\alpha \end{pmatrix}}{\sqrt{x^2+y^2+s^2} \cdot 1} \Rightarrow$$

$$(x^2+y^2+s^2)\cos^2\beta = (-x\sin\alpha + s\cos\alpha)^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2(\cos^2\beta - \sin^2\alpha) + 2\sin\alpha\cos\alpha \cdot s \cdot x + y^2\cos^2\beta + s^2(\cos^2\beta - \cos^2\alpha) = 0 \quad (*)$$

Es liegt offensichtlich eine Kurve 2. Ordnung vor.

1. Fall: α = 0° (Kegelachse und Ebene stehen senkrecht aufeinander)

Aus (*) folgt:

$$x^2\cos^2\beta + y^2\cos^2\beta + s^2(\cos^2\beta - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 = \frac{(1-\cos^2\beta)s^2}{\cos^2\beta} \Leftrightarrow$$

$$x^2+y^2=\frac{\sin^2\beta\cdot s^2}{\cos^2\beta}\Leftrightarrow$$
$$x^2+y^2=(s\cdot\tan\beta)^2$$

Ist s ≠ 0, so liegt ein **Kreis** mit Mittelpunkt (0/0) und Radius $r=s\cdot\tan\beta$ vor.
Im Falle von s = 0 lautet die Gleichung $x^2+y^2=0$. Nur der **Punkt** (0/0) erfüllt die Gleichung, d. h. die Ebene schneidet die Kegelachse senkrecht in der Spitze.

2. Fall ß = 90°- α (d.h. der Schnittwinkel zwischen Ebene und Kegelachse ist genau so groß wie der halbe Öffnungswinkel des Kegels)

Aus (*) folgt:
$$x^2\left(\cos^2\beta-\sin^2(90°-\beta)\right)+2\sin(90°-\beta)\cos(90°-\beta)\cdot s\cdot x+y^2\cos^2\beta+$$
$$s^2(\cos^2\beta-\cos^2(90°-\beta))=0$$

Wegen $\sin(90°-\beta)=\cos\beta$ und $\cos(90°-\beta)=\sin\beta$ folgt weiter:
$$2\cos\beta\cdot\sin\beta\cdot s\cdot x+y^2\cos^2\beta+s^2(\cos^2\beta-\sin^2\beta)=0$$
Setzt man
$c=\cos^2\beta,\quad d=2\cos\beta\cdot\sin\beta\cdot s,\quad e=0,\quad f=s^2(\cos^2\beta-\sin^2\beta)=0$, so sind im Falle von s ≠ 0 die Bedingungen von A. 3. erfüllt und es handelt sich um eine in Richtung der x-Achse geöffnete **Parabel** mit dem Scheitelpunkt $\left(-\frac{f}{d}/0\right)$

und dem Streckfaktor $-\frac{c}{d}$.

Ist s = 0, so lautet die Gleichung $y^2\cdot\cos^2\beta=0$. Sie wird von allen Punkten der x-Achse erfüllt, d.h. die Ebene verläuft durch die **Kegelspitze** und berührt den Kegel.

3. Fall ß < 90°- α

Um die Bedingungen aus A.1.2 heranziehen zu können, setzt man in (*):
$a=\cos^2\beta-\sin^2\alpha,\quad c=\cos^2\beta,\quad d=2\sin\alpha\cos\alpha\cdot s,\quad e=0,\quad f=s^2(\cos^2\beta-\cos^2\alpha)$
Wegen $\cos\beta>\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$ und damit $\cos^2\beta>\sin^2\alpha$ sind a und c beide positiv und verschieden. Ist nun s ≠ 0, so ist noch zu zeigen, dass

$k=-\frac{f}{a}+\frac{d^2}{4a^2}+\frac{e^2}{4ac}$ positiv ist.

Nachweis:
$$k=-\frac{f}{a}+\frac{d^2}{4a^2}\Leftrightarrow$$
$$k=\frac{d^2-4af}{a^2}$$
k ist positiv, wenn

$d^2 > 4af \Leftrightarrow$

$4\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha \cdot s^2 > 4(\cos^2\beta - \sin^2\alpha)\cdot s^2 \cdot (\cos^2\beta - \cos^2\alpha) \Leftrightarrow$

$0 > \cos^2\beta \cdot \cos^2\beta - \sin^2\alpha \cdot \cos^2\beta - \cos^2\beta \cdot \cos^2\alpha \Leftrightarrow$

$0 > \cos^2\beta \cdot (\cos^2\beta - 1)$

Die Gleichung ist erfüllt, da die rechte Seite negativ ist.

Es handelt sich also um eine **Ellipse** mit dem Mittelpunkt $\left(-\frac{d}{2a} / -\frac{e}{2c}\right)$, der Hauptachse $\sqrt{\frac{k}{a}}$ und der Nebenachse $\sqrt{\frac{k}{c}}$.

Ist s = 0, so lautet die Gleichung: $x^2(\cos^2\beta - \sin^2\alpha) + y^2\cos^2\beta = 0$.

Da beide Koeffizienten positiv sind, erfüllt auch hier nur der **Punkt** (0/0) die Gleichung. Die Ebene schneidet den Kegel nur in der Spitze – Ebene und Kegelachse stehen nicht senkrecht aufeinander.

4. Fall ß > 90°- α

Analog zum 3. Fall folgt. $\cos^2\beta < \sin^2\alpha$.

Somit ist a<0, c >0, a ≠ c und k>0 (siehe oben). Ist nun s ≠ 0, so liegt eine in Richtung der y-Achse geöffnete **Hyperbe**l mit dem Mittelpunkt

$\left(-\frac{d}{2a} / -\frac{e}{2c}\right)$ vor.

Ist s = 0, so lautet die Gleichung: $x^2(\cos^2\beta - \sin^2\alpha) + y^2\cos^2\beta = 0$.

Da der Koeffizient bei x² negativ und der Koeffizient bei y² positiv ist, wird die Gleichung von zwei sich in (0/0) **schneidenden Geraden** erfüllt. Die Ebene verläuft also durch die Kegelspitze und schneidet den Kegel in zwei Seiten-kanten.

Bei der Untersuchung der Kurven 2. Ordnung traten im Abschnitt A auch noch die Sonderfälle zweier **paralleler Geraden** auf. Diese erhält man, wenn man die x-y-Ebene mit einem Zylinder schneidet, dessen Achse parallel zur x-Achse bzw. y-Achse verläuft.

F. Zugang über affine Abbildungen

a) Ellipse

1. Abbildung eines Kreises x² + y² = r² durch
(x/y) → (x'/y') mit x' = x und y' = ky

$$x^2 + y^2 = r^2 \Leftrightarrow x'^2 + \left(\frac{y'}{k}\right)^2 = r^2 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{r^2} + \frac{y'^2}{(k\cdot r)^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

mit a = r und b = k·r

2. Verschiebung (x'/y') → (x''/y'') mit x'' = x' + c und y'' = y'+ d

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{(x''-c)^2}{a^2} + \frac{(y''-d)^2}{b^2} = 1$$

b) Hyperbel

1. Rechtsdrehung der Hyperbel $y = \frac{a}{x}$ um (0/0) mit dem Drehwinkel 45°:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \frac{a}{x} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-x + \frac{a}{x}\right) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$x'^2 - y'^2 = \frac{1}{2}\left(x^2 + 2a + \left(\frac{a}{x}\right)^2\right) - \frac{1}{2}\left(x^2 - 2a + \left(\frac{a}{x}\right)^2\right) \Leftrightarrow$$

$$x'^2 - y'^2 = 2a$$

2. (x'/y') → (x''/y'') mit x'' = x' und y'' = ky'

$$x'^2 - y'^2 = 2a \Leftrightarrow x''^2 - \left(\frac{y''}{k}\right)^2 = 2a \Leftrightarrow \frac{x''^2}{\left(\sqrt{2a}\right)^2} - \frac{y''^2}{\left(k \cdot \sqrt{2a}\right)^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1, \quad mit\ a = \sqrt{2a}, b = k \cdot \sqrt{2a}$$

3. Verschiebung x''/y'') → (x'''/y''') mit x''' = x'' + c und y''' = y''+ d

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{(x'''-c)^2}{a^2} - \frac{(y'''-d)^2}{b^2} = 1$$