# Einführung in die Integralrechnung
## Das Integral als Gesamteffekt von Änderungen bzw. als Summe orientierter Flächeninhalte

Jürgen Zumdick

**Inhalt**



## 1) Konstante und lineare Änderungsraten

**Situation 1**

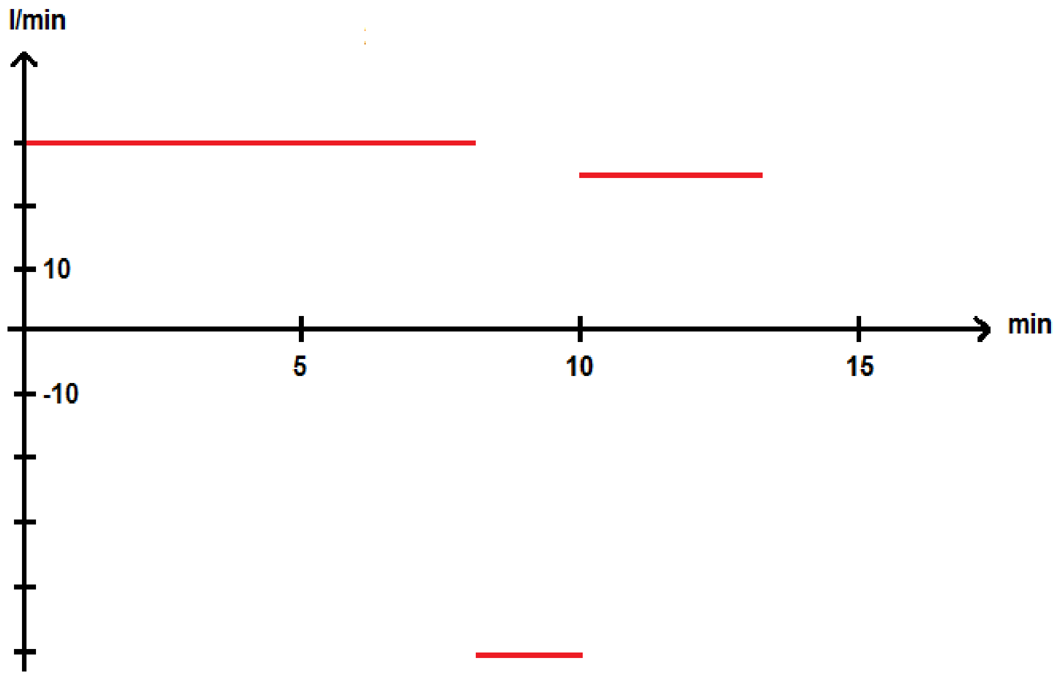
In eine Badewanne wird gleichmäßig Wasser eingelassen (30 l /min). Nach 8 Minuten wird das Wasser abgedreht und aus Versehen der Stöpsel gezogen und es fließen für 2 Minuten gleichmäßig 50 l /min ab. Um die Wanne wieder zu füllen, wird der Abfluss gesperrt und der Zufluss etwas geöffnet, so dass gleichmäßig für 3 Minuten 25 l /min zufließen

a) Stellen Sie die Gleichung der Zuordnung f: t $\rightarrow$ Zuflussgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t auf und zeichnen Sie den zugehörigen Graphen.
b) Stellen Sie nun die Gleichung der Zuordnung F: t $\rightarrow$ Menge des Wassers, welches sich zum Zeitpunkt t in der Badewanne befindet, auf.

**Lösung:**

a) $$f(t)=\begin{cases} 30 \; \text{für} \; 0 \le t \le 8 \\ -50 \; \text{für} \; 8 < t \le 10 \\ 25 \; \text{für} \; 10 < t \le 13 \end{cases}$$

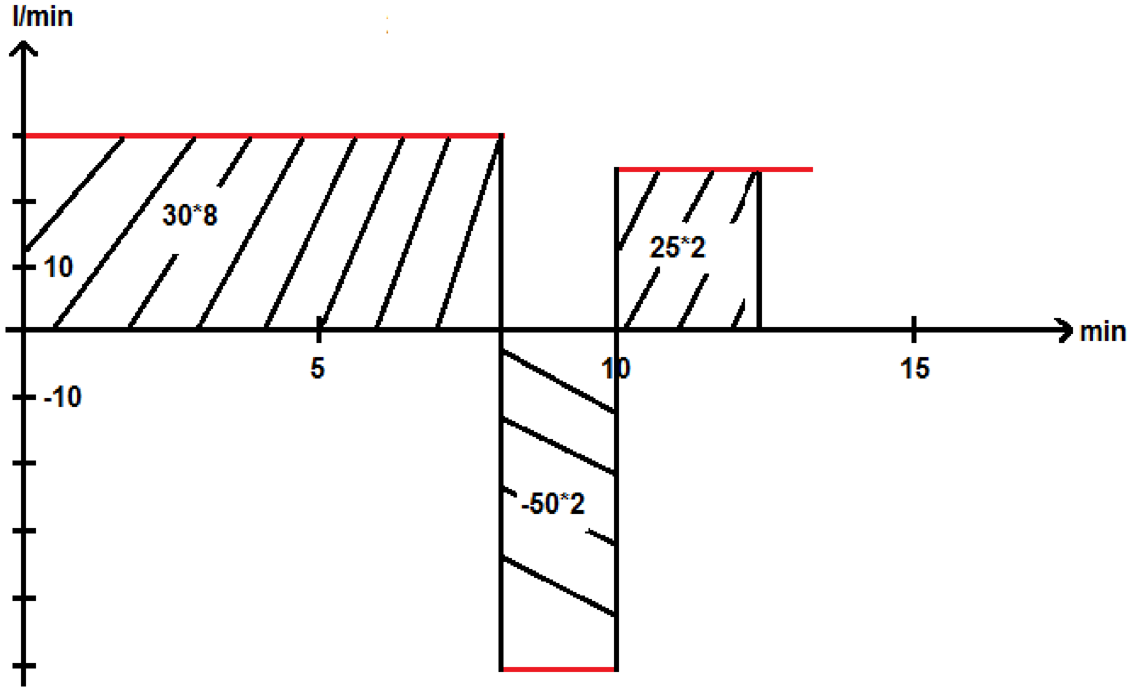
Zuflussgeschwindigkeiten werden mit einem positiven Vorzeichen, Abflussgeschwindigkeiten mit einem negativen Vorzeichen versehen.



b) $F(t)=\begin{cases} 30t & \text{für } 0\le t\le 8 \\ 240-50(t-8) & \text{für } 8<t\le 10 \\ 140+25(t-10) & \text{für } 10<t\le 13 \end{cases}$ bzw. $F(t)=\begin{cases} 30t & \text{für } 0\le t\le 8 \\ -50t+640 & \text{für } 8<t\le 10 \\ 25t-110 & \text{für } 10<t\le 13 \end{cases}$

Begründung zu F(t):
Nach 8 Minuten befinden sich 240 l Wasser ( = F(8) ) in der Wanne. Nun fließen 50 l pro Minute ab. Da bereits 8 Minuten vergangen sind, muss die Abflussgeschwindigkeit -50 mit (t – 8) multipliziert werden.
Nach 10 Minuten befinden sich 140 l Wasser ( = F(10) ) in der Wanne. Da jetzt 10 Minuten vergangen sind, muss die Zuflussgeschwindigkeit 25 mit (t – 10) multipliziert werden.

Die Wassermenge zum Zeitpunkt t kann mithilfe von F(t) berechnet werden.
Beispiel: F(12) = 25·12 – 110 = 190.
Andererseits gilt auch: F(12) = 30·8 - 50·2 + 25·2 (Nachvollzug des Füllvorgangs).
Jedes Produkt kann als Flächeninhalt eines Rechtecks zwischen dem Graphen von f und der t-Achse aufgefasst werden. Liegt das Rechteck unterhalb der t-Achse, so ist der Flächeninhalt mit einem negativen Vorzeichen zu versehen.




Die Wassermenge zum Zeitpunkt 12 ist das **Ergebnis (Gesamteffekt) sich ändernder Zu- bzw. Abflussraten**. Die Wassermenge ist auch interpretierbar als Summe **orientierter Flächeninhalte (Höhe (l/min) multipliziert mit Breite (min) )**. Hierfür wird folgendes Symbol eingeführt: $\int_0^{12} f(t)\cdot dt$ (gelesen**: Integral von 0 bis 12 f(t) dt**). Dieses Integral stellt die Summe der orientierten Flächeninhalte zwischen dem Graphen von f und der t-Achse im Intervall von 0 bis 12 dar und entspricht also der sich nach 12 Minuten in der Wanne befindlichen Wassermenge.
0 heißt **untere Grenze**, 12 heißt **obere Grenze**.

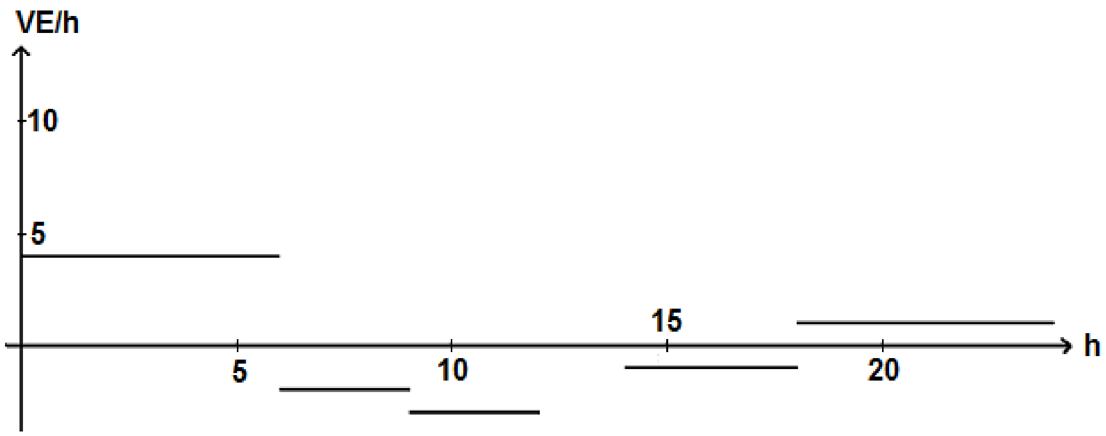
**Aufgabe 1:**
Gegeben ist obige Funktion f.

a) Berechnen Sie $\int_5^{12} f(t)dt$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

b) Zeigen Sie, dass $\int_{5}^{12} f(t)\,dt = F(12) - F(5)$

c) Zeigen Sie, dass $\int_{5}^{9} f(t)\,dt + \int_{9}^{12} f(t)\,dt = \int_{5}^{12} f(t)\,dt$ **(Intervalladditivität)**

**Situation 2 (Alternative zur Situation 1)**
Ein Speicherwerk hat folgende Daten der Zu- und Abflussraten des Speicherbeckens über den Tagesverlauf ermittelt (siehe dazu folgenden Graphen):




x-Achse: Stunden (h);
y-Achse: Volumeneinheiten pro Stunde $\frac{VE}{h}$

a) Erklären Sie den unterschiedlichen Zu- bzw. Abfluss im Laufe des Tages in Bezug auf das Verbrauchsverhalten einer städtischen Bevölkerung.
b) Um 0.00 Uhr seien 0 VE im Speicherbecken. Ermitteln Sie für den Zeitraum von 0.00 Uhr bis 24.00 Uhr die im Speicherbecken befindliche Wassermenge und stel len Sie die Ergebnisse in einem Graphen dar. Zeichnen Sie diesen Graphen in das obige Koordinatensystem.

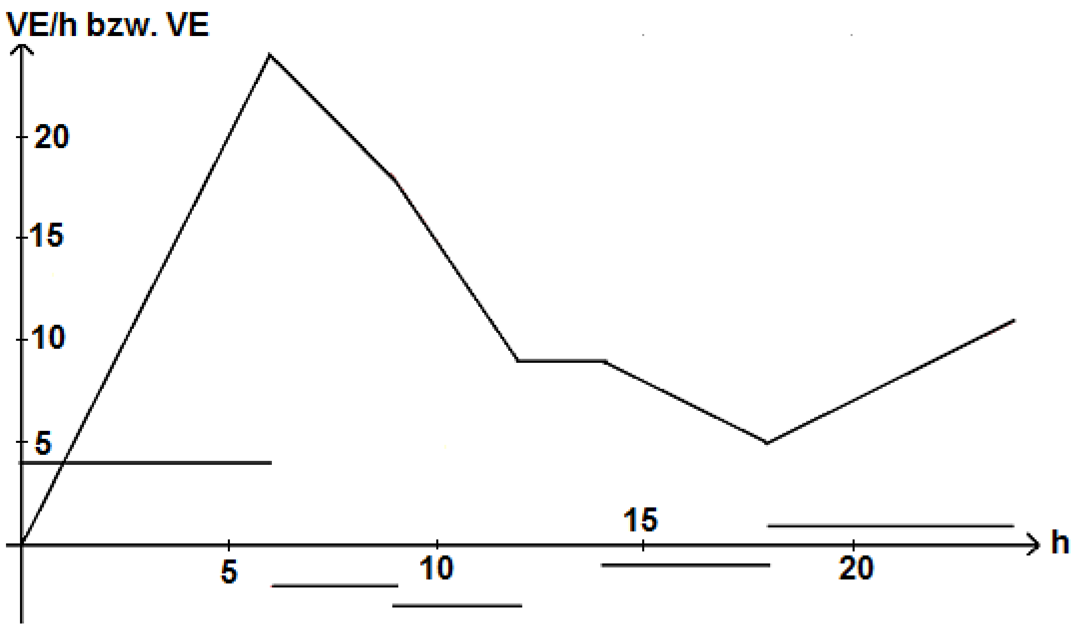
**Lösung:**
a) Hier können Hypothesen zum Verbrauchsverhalten einer städtischen Bevölkerung im Verlaufe eines Tages aufgestellt werden.
b) Aus der gegebenen Zeichnung werden für die Zufluss- bzw. Abflussratenfunktion f folgende Informationen entnommen:

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{für } 0 \le x \le 6 \\ -2 & \text{für } 6 < x \le 9 \\ -3 & \text{für } 9 < x \le 12 \\ 0 & \text{für } 12 < x \le 14 \\ -1 & \text{für } 14 < x \le 18 \\ 1 & \text{für } 18 < x \le 24 \end{cases} \quad \text{x in h, f(x) in } \frac{VE}{h}$$

Sei F die Funktion, die zu jedem Zeitpunkt zwischen 0.00 Uhr und 24.00 Uhr die im Speicherbecken befindliche Wassermenge angibt:

$$F(x)=\begin{cases} 4x & \textit{für } 0 \le x \le 6 \\ 24-2(x-6)=-2x+36 & \textit{für } 6 < x \le 9 \\ 18-3(x-9)=-3x+45 & \textit{für } 9 < x \le 12 \\ 9-0(x-12)=9 & \textit{für } 12 < x \le 14 \\ 9-1(x-14)=-x+23 & \textit{für } 14 < x \le 18 \\ 5+1(x-18)=x-13 & \textit{für } 18 < x \le 24 \end{cases}$$

Begründung zum Term 24 – 2(x – 6):
Nach 6 Stunden sind 24 VE im Becken. Nun fließen 2 VE pro Stunde ab. Da schon 6 Stunden vergangen sind, muss -2 mit (x – 6) multipliziert werden.




Im vorstehenden Koordinatensystem sind die Graphen von f und F gezeichnet. Die Maßbezeichnung auf der x-Achse ist h, auf der y-Achse VE/h für f und VE für F.

**Es gilt:**
F(24) = 4·6 + (-2)·3 + (-3)·3 + 0·2 + (-1)·4 + 1·6 = 24 + (-6) + (-9) + 0 + (-4) + 6 = 11.
Nach 24 Stunden sind also 11 VE im Becken.
Jeder Summand des Terms F(24) kann als Flächeninhalt einer Rechtecksfläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse aufgefasst werden. Dabei sind Flächen unterhalb der x-Achse mit einem negativen Vorzeichen zu versehen (orientierte Flächeninhalte).

Die Wassermenge zum Zeitpunkt 24 entspricht also einer **Summe orientierter Flächeninhalte**. Hierfür wird folgendes Symbol eingeführt: $\int_0^{24} f(x)\,dx$ (gelesen: **Integral von 0 bis 24 f(x)** ). Dieses Integral stellt die Summe der orientierten Flächeninhalte zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Intervall von 0 bis 24 bzw. die Zunahme der Wassermenge innerhalb von 24 Stunden gegenüber der Wassermenge um 0.00 Uhr dar. Die Wassermenge nach 24 Stunden ist das **Ergebnis (Gesamteffekt) sich ändernder Zu- bzw. Abflussraten**.

**Situation 3**
Für die Funktion f gelte:

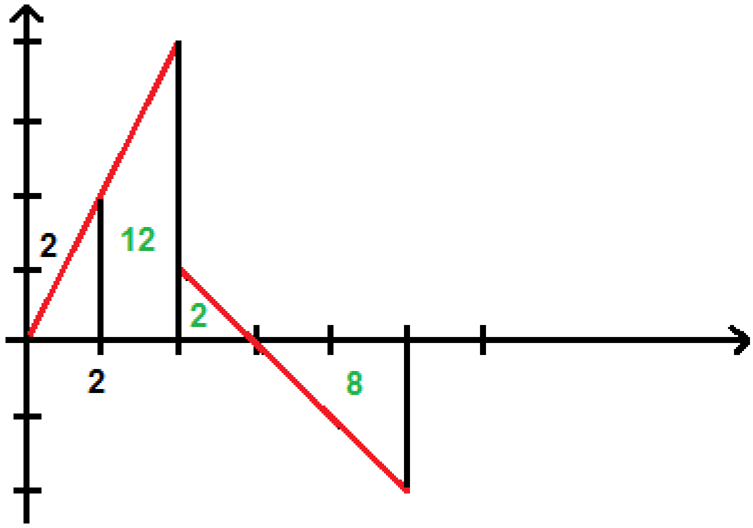
$$f(x)=\begin{cases} 2x & \text{für } 0\le x\le 4 \\ -x+6 & \text{für } 4<x\le 10 \end{cases}$$

a) Berechnen Sie $\int_2^{10} f(x)\,dx$

b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Intervall [2; 10]

c) Berechnen Sie $F_2(x)=\int_2^x f(t)\,dt$ für $2 \le x \le 4$ (Die Funktionsvariable wird mit t bezeichnet und die variable obere Grenze mit x).

**Lösung**




a) Da das Integral die Summe orientierter Flächeninhalte darstellt (und auch wegen der Intervalladditivität), gilt:

$$\int_2^{10} f(x)\,dx=\int_2^{4} f(x)\,dx+\int_4^{6} f(x)\,dx+\int_6^{10} f(x)\,dx$$
$$=\frac{f(2)+f(4)}{2}\cdot 2+\frac{2\cdot 2}{2}-\frac{4\cdot 4}{2}=12+2-8=6$$

(Die erste Fläche ist eine Trapezfläche, die beiden anderen sind jeweils Dreiecksflächen. Beachte, dass für die Länge der Mittellinie des Trapezes gilt: $\frac{f(2)+f(4)}{2}$ )

b) Bei der Flächenberechnung müssen auch die unterhalb der x-Achse liegenden Flächen mit einer positiven Maßzahl in die Berechnung eingehen. Um dies sicherzustellen, wird von allen Teilintegralen der Betrag genommen:

$$Fläche=\left|\int_2^{4} f(x)\,dx\right|+\left|\int_4^{6} f(x)\,dx\right|+\left|\int_6^{10} f(x)\,dx\right|=12+2+8=22$$

c) Liegt x im Intervall [2; 4], dann ist die zu berechnende Fläche eine Trapezfläche und es gilt:

$$F_2(x)=\int_2^x f(t)\,dt=\frac{f(2)+f(x)}{2}\cdot(x-2)=\frac{4+2x}{2}\cdot(x-2)=(2+x)\cdot(x-2)=x^2-4$$

f heißt **Integrand-** oder **Randfunktion**, $F_2$ heißt **Integralfunktion (mit der unteren Grenze 2)**.

**Aufgabe 2**

Gegeben ist vorstehende Funktion f (Situation 3).

a) Berechnen Sie $\int_{0}^{9} f(x)\,dx$

b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Intervall [0; 9]. Erklären Sie den Unterschied zum Ergebnis aus Teil a).

c) Berechnen Sie $F_3(x)$ für 3 ≤ x ≤ 4.

d) Berechnen Sie $F_2(x) - F_3(x)$ für 3 ≤ x ≤ 4. Welche Bedeutung hat das Ergebnis?

e) Berechnen Sie $F_7(x)$ für 7 ≤ x ≤ 10.

**Aufgabe 3**

Eine Feuerwerksrakete wird aus 90m Höhe über einem Talboden senkrecht nach oben geschossen. Ihre Geschwindigkeit v zum Zeitpunkt t sei v(t) = -5·t + 40 (t in sec, v(t) in m/sec).

a) Zeichnen Sie den Graphen von v und beschreiben Sie anhand des Graphen den Flug der Rakete.

b) Welche Höhe über dem Talboden hat die Rakete nach 3 Sekunden erreicht?

c) Welche größte Höhe über dem Talboden erreicht die Rakete?

d) Wann schlägt die Rakete auf den Talboden auf?

(Aus Vereinfachungsgründen wird angenommen, dass die gesamte Flugbahn senkrecht zum Talboden verläuft).

Hinweis: Beachten Sie: $\frac{m}{sec} \cdot sec = m$ (Geschwindigkeit ·Zeit = Weg)

**Aufgabe 4**

Von der Spitze eines 30m hohen Turmes fällt ein Stein.

a) Welche Zeit benötigt der Stein bis zum Aufschlagen auf den Erdboden?

b) Welche Aufschlagsgeschwindigkeit hat der Stein?

Hinweis: Die Erdbeschleunigung beträgt 9,81 m/sec².

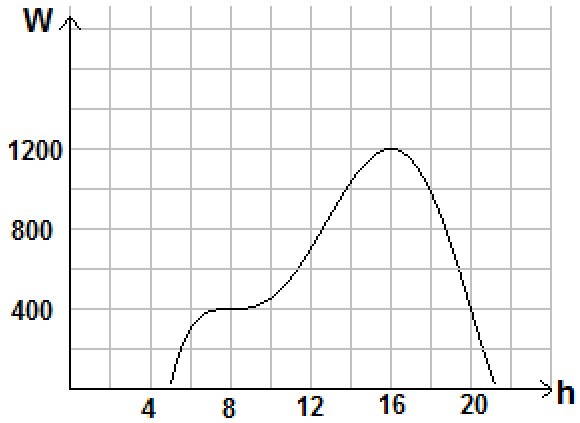
Aus Vereinfachungsgründen soll der Luftwiderstand unberücksichtigt bleiben.

Beachten Sie: $\frac{m}{sec^2} \cdot sec = \frac{m}{sec}$ (Beschleunigung ·Zeit = Geschwindigkeit)

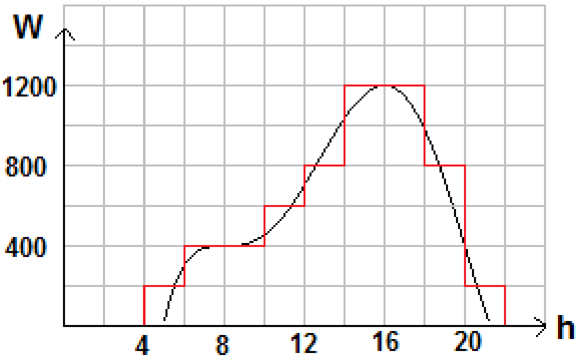
## 2) Unregelmäßige Änderungsraten

**Situation 4**

Eine Photovoltaik-Anlage liefert im Verlauf eines Tages die in der folgenden Graphik dargestellte Leistung.

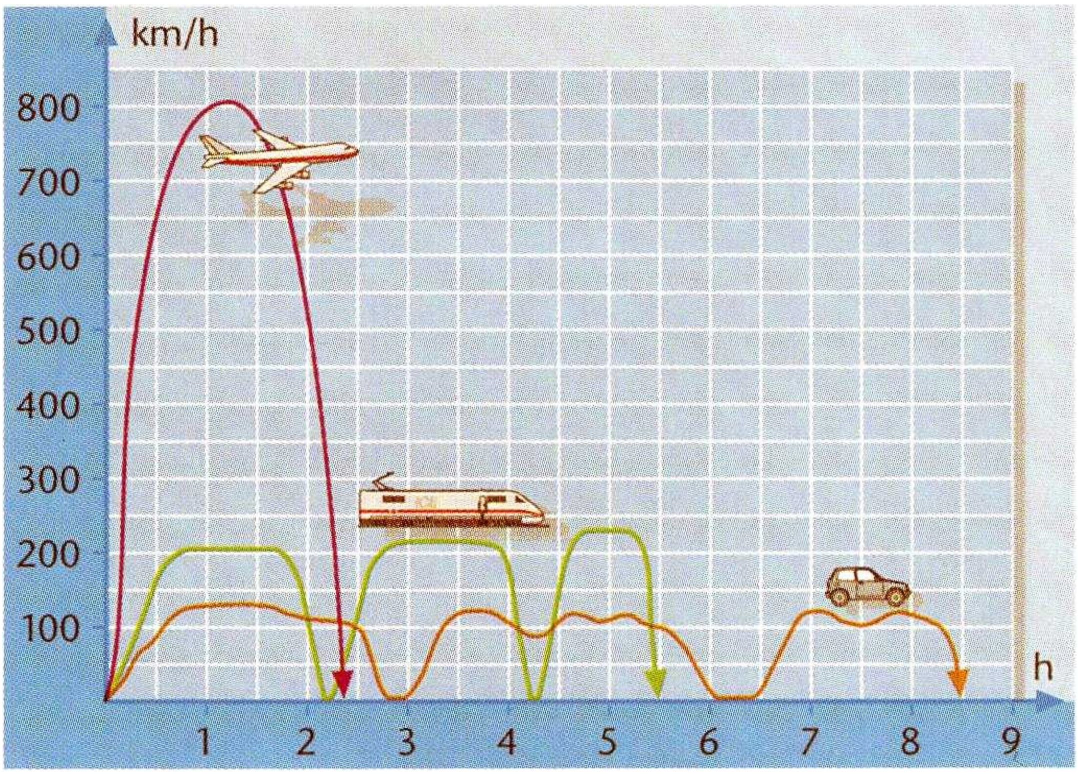


Auf der waagerechten Achse ist die Uhrzeit eingetragen, auf der senkrechten Achse die Leistung (Watt).
Wie hoch ist die erzeugte Energie (kWh)?
**Lösung:**
Die erzeugte Energie entspricht dem Flächeninhalt zwischen der Kurve und der Stundenachse (Watt multipliziert mit Stunden = Wh; 1000Wh = 1kWh). Der Gesamteffekt der sich ändernder Leistung ist die erzeugte Energie.
Um die Fläche näherungsweise zu berechnen, wird eine Treppenfigur eingepasst und deren Flächeninhalt (=Energie) bestimmt:




200W·2h + 400W·4h + 600W·2h + 800W·2h + 1200W·4h + 800W·2h + 200W·2h = 11600Wh = 11,6 kWh.
Das Verfahren ließe sich durch eine Verfeinerung des Gitters verbessern.

**Situation 5**
Das folgende Bild zeigt die momentanen Geschwindigkeiten dreier Verkehrsmittel auf ihrem Weg von München nach Hamburg.




(Quelle. MUED Appelhülsen)

a) Berechnen Sie näherungsweise die Strecken, welche die drei Verkehrsmittel jeweils zurückgelegt haben.

b) Bestimmen Sie näherungsweise die Durchschnittsgeschwindigkeiten der Verkehrsmittel (inclusive Pausen).

c) An welchen Orten könnte das Auto eine Pause eingelegt haben?

d) Sei a: x → a(x) die Zeit-Geschwindigkeitsfunktion des Autos. Notieren Sie unter Verwendung der Integralschreibweise einen Term, welcher die Durchschnittsgeschwindigkeit des Autos im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ angibt.

**Lösung**

a) Der Gesamteffekt der sich ändernden Geschwindigkeit ist der zurückgelegte Weg. Dieser entspricht dem Flächeninhalt zwischen dem jeweiligen Graphen und der Zeitachse (km/h multipliziert mit h). Der Flächeninhalt eines Gitterkästchens beträgt 50·0,5 = 25. Ein Gitterkästchen entspricht somit einem zurückgelegten Weg von 25 km.

| Verkehrsmittel | Anzahl Gitterkästchen | Zurückgelegter Weg |
|---|---|---|
| Flugzeug | 56 (geschätzt) | 1400 km |
| Bahn | 34 (geschätzt) | 850 km |
| Auto | 30 (geschätzt) | 750 km |

Wie lassen sich die unterschiedlichen Weglängen erklären?

b)

| Durchschnittsgeschwindigkeit in km/h | |
|---|---|
| Flugzeug | $\frac{1400}{2,7}=519$ |
| Bahn | $\frac{850}{5,5}=155$ |
| Auto | $\frac{750}{8,5}=88$ |

c) Zieht man einen Routenplaner zu Hilfe, so kommen als Pausenorte Würzburg und Göttingen in Betracht.

d) $$\frac{\int_{t_1}^{t_2} a(x)\,dx}{t_2-t_1} \quad \left(\frac{\text{Zurückgelegter Weg}}{\text{Benötigte Zeit}}\right)$$

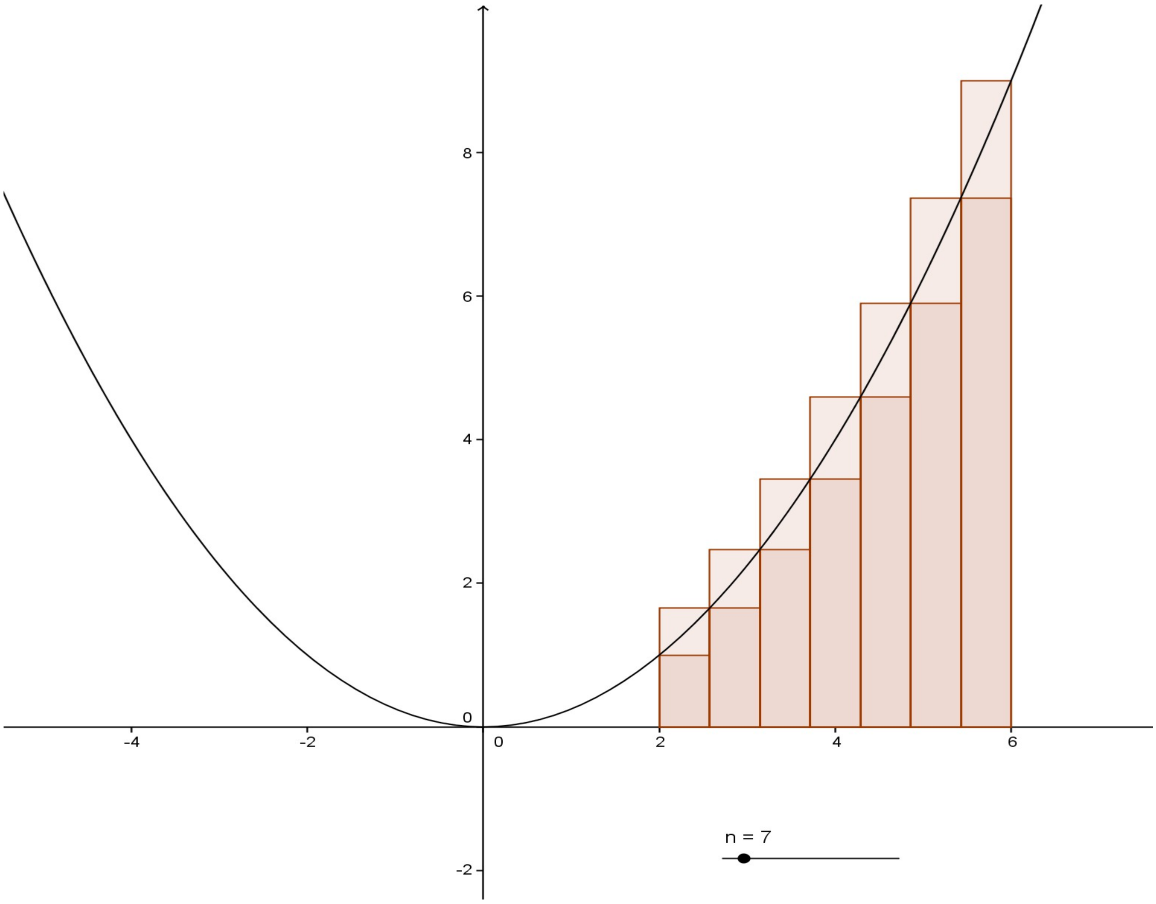
## 3) Quadratische und kubische Änderungsraten

**Situation 6**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0{,}25 \cdot x^2$.

Wie groß ist der Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der x-Achse im Intervall [2; 6]?

Es wird an das in Situation 4 verwendete Verfahren der Treppenfigur angeknüpft. Das Verfahren wird jedoch dahingehend modifiziert, dass eine untere und eine obere Treppenfigur verwendet wird, um somit eine Eingrenzung des tatsächlichen Flächeninhalts zu erhalten:




Im vorstehenden Bild ist das Intervall [2; 6] in 7 Teilintervalle gleiche Länge zerlegt. Die nachfolgende Rechnung wird allgemein für ein Intervall [a; b] und n Teilintervalle durchgeführt. Die Breite eines Teilintervalls beträgt dann $\frac{b-a}{n} = \frac{Intervalllänge}{Anzahl\, der Teilintervalle}$, die Höhe des ersten Teilintervalls unter der Kurve beträgt $f(a)$, die Höhe des 2. Teilintervalls unter der Kurve beträgt $f\left(a+\frac{b-a}{n}\right)$ usw.

Dann gilt für die Untersumme $U_n$ (Flächeninhalt der Treppenfigur unterhalb der Kurve):

$$U_n = f(a)\cdot\frac{b-a}{n} + f\left(a+\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n} + f\left(a+2\cdot\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n} + \ldots$$
$$+ f\left(a+(n-1)\cdot\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}$$

Um die Rechnung zu vereinfachen wird zunächst a = 0 gewählt. Man erhält:

$$U_n = f(0)\cdot\frac{b}{n} + f\left(\frac{b}{n}\right)\cdot\frac{b}{n} + f\left(2\cdot\frac{b}{n}\right)\cdot\frac{b}{n} + \ldots + f\left((n-1)\cdot\frac{b}{n}\right)\cdot\frac{b}{n}$$

Da $f(x)=0{,}25\,x^2$ folgt:

$$U_n = 0{,}25 \cdot \left[ \left( \frac{b}{n} \right)^2 \cdot \frac{b}{n} + \left( 2 \cdot \frac{b}{n} \right)^2 \cdot \frac{b}{n} + \ldots + \left( (n-1) \cdot \frac{b}{n} \right)^2 \cdot \frac{b}{n} \right]$$

$$\Leftrightarrow U_n = 0{,}25 \cdot \left( \frac{b}{n} \right)^3 \cdot \left( 1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 \right)$$

$$\Leftrightarrow U_n = 0{,}25 \cdot \left( \frac{b}{n} \right)^3 \cdot \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2\mathrm{n}-1)}{6}$$

$$U_n = 0{,}25 \cdot \left( \frac{b}{n} \right)^3 \cdot \frac{2\mathrm{n}^3 - 3\mathrm{n}^2 + n}{6}$$

$$\Leftrightarrow U_n = 0{,}25 \cdot b^3 \cdot \frac{2\mathrm{n}^3 - 3\mathrm{n}^2 + n}{6 \cdot n^3}$$

$$\Leftrightarrow U_n = 0{,}25 \cdot b^3 \cdot \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2\mathrm{n}} + \frac{1}{6\mathrm{n}^2} \right)$$

**Hinweis:** Die oben verwendete Formel $1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k \cdot (k+1) \cdot (2\mathrm{k}+1)}{6}$ findet man in jeder Formelsammlung unter dem Begriff „Reihe“.

Wird n immer größer, dann nähert sich $\frac{1}{2\mathrm{n}}$ immer mehr der Zahl 0. Man schreibt dafür

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{2\mathrm{n}} = 0$ (gesprochen: Limes n gegen unendlich von $\frac{1}{2n}$ gleich 0). Dieser Vorgang heißt auch **Grenzwertbildung**.

Auch gilt $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{6\mathrm{n}^2} = 0$ , folglich $\lim\limits_{n \to \infty} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2\mathrm{n}} + \frac{1}{6\mathrm{n}^2} \right) = \frac{1}{3}$ und schließlich

$$\lim_{n \to \infty} U_n = \frac{0{,}25}{3} \cdot b^3$$

**Anmerkung:** Auf einen exakten (mathematischen) Grenzwertbegriff wird an dieser Stelle verzichtet.

**Aufgabe 5**

Stelle Sie die Obersumme $O_n$ (Flächeninhalt der Treppenfigur oberhalb der Kurve) im Intervall [0; b] auf und zeigen Sie $\lim\limits_{n \to \infty} O_n = \frac{0{,}25}{3} \cdot b^3$ .

Aus vorstehenden Rechnungen folgt für den Flächeninhalt A im Intervall [2; 6]:

$$A = 0{,}25 \cdot \frac{6^3}{3} - 0{,}25 \cdot \frac{2^3}{3} = 17\frac{1}{3}$$

Für f(x) = 0,25·x² gilt: $F_0(x) = \int_0^x 0{,}25 \cdot t^2 \, dt = 0{,}25 \cdot \frac{x^3}{3}$

**Aufgabe 6**

Zeigen Sie, dass für den Grenzwert der Unter- und Obersumme der Funktion f: f(x) = x³ im Intervall [0; b] gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} U_n = \lim\limits_{n \to \infty} O_n = \frac{b^4}{4}$ .

Hinweis zur Lösung: $1+2^3+3^3+...+k^3=\frac{k^2\cdot(k+1)^2}{4}$

Folglich gilt für f(x) = x³: $F_0(x)=\int_0^x t^3\,dt=\frac{x^4}{4}$

## 4) Zusammenfassung

Das **(bestimmte) Integral** einer Funktion f im Intervall [a; b] wird definiert als Summe der **orientierten Flächeninhalte** zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Bereich dieses Intervalls, in Zeichen: $\int_a^b f(x)\,dx$ . Orientiert heißt, dass Flächeninhalte oberhalb (unterhalb) der x-Achse mit einem positiven (negativen) Vorzeichen zu versehen sind.
Die Flächeninhalte können je nach Bedeutung von f unterschiedlich interpretiert werden (siehe Tabelle).
Das Integral kann wie folgt berechnet werden:

a) exakt mithilfe elementarer Flächenformeln für Rechtecke, Dreiecke, Trapeze (falls f eine konstante oder lineare Funktion ist)
b) näherungsweise mithilfe von Treppenfiguren (z.B. falls der Graph von f eine empirisch ermittelte Messwertkurve ist)
c) mithilfe des Grenzwertes von Unter- und Obersummen.

In den Fachwissenschaften wird das Integral auch als **gemeinsamer Grenzwert von Unter- und Obersumme definiert (Riemann-Integral)**. Diese Definition ist äquivalent zu der hier benutzten Definition.

Allgemein können Unter- und Obersumme wie folgt definiert werden:
Sei die Funktion f im Intervall [a,b] definiert und das Intervall [a;b] in n gleichlange Teilintervalle unterteilt. Ist $m_i$ bzw. $M_i$ das Minimum bzw. Maximum der Funktion f im i-ten Teilintervall, dann heißt
$U_n=\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{k=1}^{k=n} m_k$ Untersumme bzw. $O_n=\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{k=1}^{k=n} M_k$ Obersumme von f im Intervall [a;b].

Hinweis: Die Schreibweise $\int_a^b f(x)\,dx$ wird im nächsten Kapitel genauer erläutert.

Die Funktion $F_a$ mit $F_a(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ heißt **Integralfunktion**, f heißt **Integrand- oder Randfunktion**. Zwei Integralfunktionen $F_a$ und $F_b$ unterscheiden sich nur um eine Konstante, nämlich um $\int_a^b f(t)\,dt$ .

| **Bedeutung von f und F in Anwendungszusammenhängen**<br>(mit möglicher Maßbezeichnung und möglicher Vorzeicheninterpretation) | | |
|---|---|---|
| **f (Änderung)** | | **F (Gesamteffekt)** |
| Länge<br>(m) | +: Höhe über einer Linie<br>(z.B. über NN) | Fläche<br>(m·m = m²) |

| | | |
|---|---|---|
| | -: Tiefe unter einer Linie (z.B. unter NN) | |
| Fließrate $\left(\frac{m^3}{h}\right)$ | +: Zuflussrate<br>-: Abflussrate | Menge $\left(\frac{m^3}{h}\cdot h = m^3\right)$ |
| Leistung (kW) | +: Leistungserzeugung<br>-: Leistungsverbrauch | Energie ( kW·h = kWh) |
| Geschwindigkeit $\left(\frac{m}{sec}\right)$ | +: Steiggeschwindigkeit<br>-: Fallgeschwindigkeit | Weg $\left(\frac{m}{sec}\cdot sec = m\right)$ |
| Beschleunigung $\left(\frac{m}{sec^2}\right)$ | +: Zunahme der Geschwindigkeit<br>-: Abnahme der Geschwindigkeit (Bremsvorgang) | Geschwindigkeit $\left(\frac{m}{sec^2}\cdot sec = \frac{m}{sec}\right)$ |

Es gilt die **Intervalladditivität**: $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

| **Zusammenstellung bisher behandelter Funktionen** | | |
|---|---|---|
| **f** | **F bzw. $F_a$** | **Situation** |
| f(t) = 30 | F(t) = 30t | Situation 1 |
| f(x) = 4 | F(x) = 4x | Situation 2 |
| f(x) = 2x | $F_2(x) = x^2 - 4$ | Situation 3 |
| $f(x) = 0{,}25\cdot x^2$ | $F_0(x) = 0{,}25\cdot\frac{x^3}{3}$ | Situation 6 |
| F(x) = -x + 6 | $F_7(x) = -\frac{x^2}{2} + 6x - 17{,}5$ | Situation 3 (Aufgabe 2 e)) |
| $f(x) = x^3$ | $F_0(x) = \frac{x^4}{4}$ | Situation 6 (Aufgabe 6) |

Ein Vergleich führt zu der Vermutung: $F'(x) = f(x)$ bzw. $F'_a(x) = f(x)$. Dies wird im nächsten Kapitel genauer untersucht.