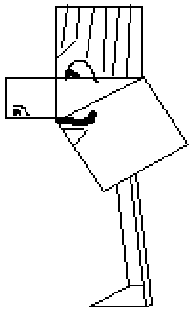
Satzgruppe des Pythagoras

Jürgen Zumdick



I. Entdecken des Satzes

1) Seilspannergeschichte oder Zimmermannsgeschichte (Ein Zimmermann legt aus Latten der Länge 1,20 m, 1,60 m und 2,00 m ein Dreieck).
2) Aus einer Werbung von Ritter-Sport Schokolade:

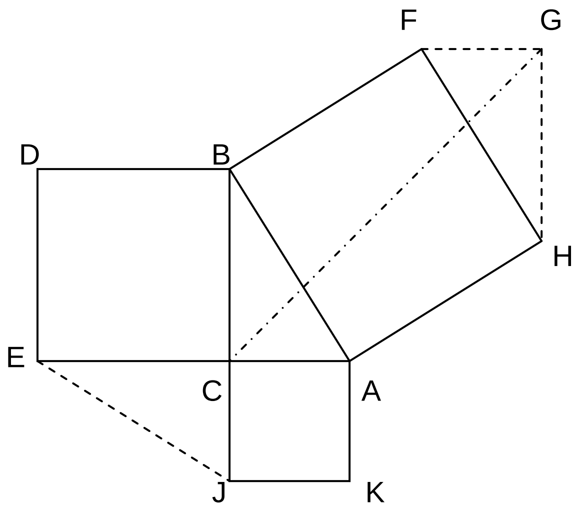
3) Aus 3 Quadraten (z. B. mit den Maßen 3, 4 und 5) und 8 rechtwinkligen Dreiecken (jeweils mit den Maßen 3, 4 und 5) sollen zwei kongruente Quadrate gebildet werden
4) Problem: Wie lang ist die Diagonale in einem Quadrat, in einem Rechteck? (Jeweils zwei derartige Figuren werden zu einem Quadrat zusammengelegt)
5) Entdecken des Höhensatzes: Ein Tunnel hat einen halbkreisförmigen Querschnitt mit einem Durchmesser von 12 m. Die beidseitigen nicht befahrbaren Seitenstreifen sind 1,50 m breit. Bis zu welcher Höhe kann ein LKW den Tunnel befahren?
(siehe weiter unten: Beweis mit Hilfe des Thalessatzes)

II. Beweise

Abbildungsgeometrische Beweise

1) Verwandlung eines Quadrats in ein flächengleiches Rechteck (Scherung, Drehung, Scherung) → Kathetensatz → Pythagoras (algebraischer Beweis) → Höhensatz (algebraischer Beweis).

2) Spiegelung und Drehung

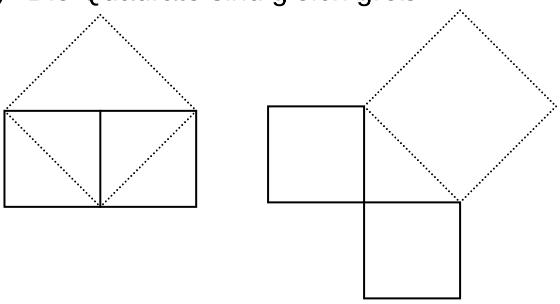


Die Vierecke JKDE und KABD sind kongruent (Spiegelung an DK). Die Vierecke CAHG und GFBC sind ebenfalls kongruent (Spiegelung am Mittelpunkt des Hypotenusenquadrats). Das Viereck KABD kann durch Rechtsdrehung um A mit dem Drehwinkel 90° auf das Viereck CAHG abgebildet werden . Somit ist das Sechseck JKABDE flächengleich zum Sechseck CAHGFB, woraus der Satz des Pythagoras folgt.

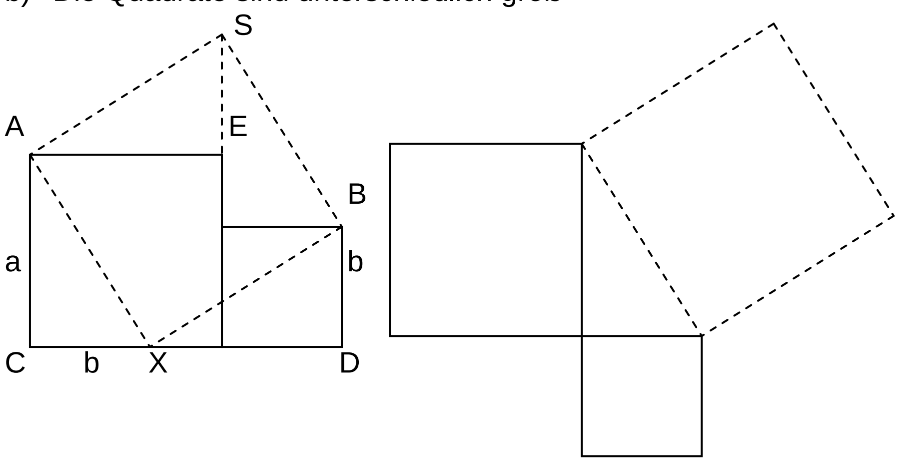
Zerlegungsbeweise

1) Umwandlung zweier Quadrate in ein flächengleiches Quadrat („Stuhl der Braut“)

a) Die Quadrate sind gleich groß

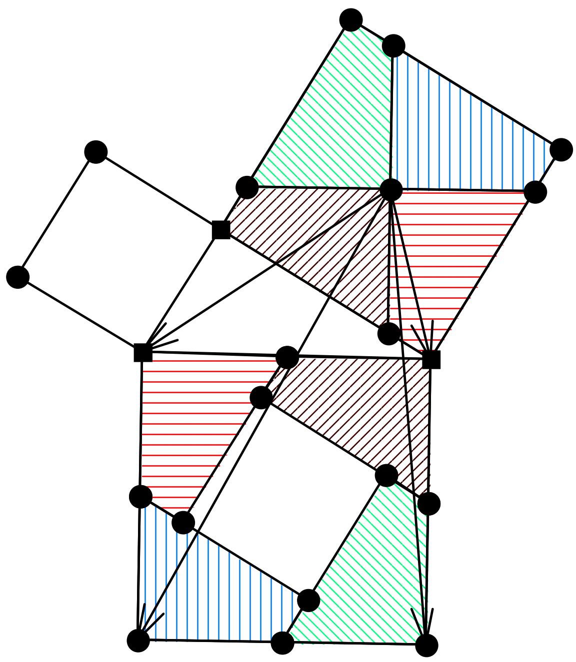


b) Die Quadrate sind unterschiedlich groß



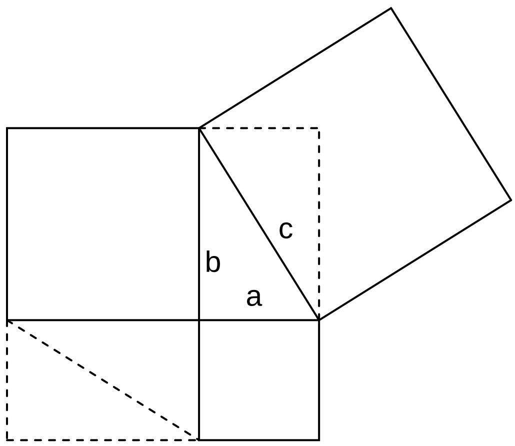
Wähle X so, dass die Strecken CX und DB gleich lang sind. XD ist dann genau so lang wie AC (|XD| = |CD| - |CX| = a + b – b = a). Die Dreiecke CXA und XDB sind somit kongruent (SWS). Da die Dreiecke rechtwinklig sind, sind die Winkel AXC und DXB zusammen 90° groß. Der Winkel BXA ist also ein rechter Winkel. Das Dreieck BAX ist folglich ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck, welches zu einem Quadrat ergänzt werden kann.
Dreht man das Dreieck CXA um A links herum mit dem Winkel 90° und das Dreieck XDB um B rechts herum mit dem Winkel 90°, so sieht man, dass die beiden Kathetenquadrate das gestrichelte Quadrat ausfüllen.

2) „Schaufelradbeweis“

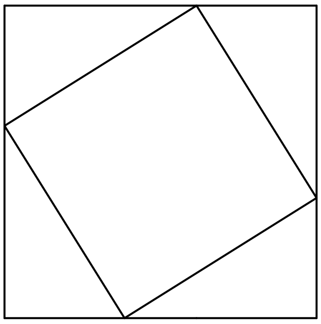


Eine Parallele zur Hypotenuse des Dreiecks und eine dazu Senkrechte schneiden sich im Mittelpunkt des größeren Kathetenquadrats. Die vier entstehenden Vierecke sind kongruent. Verschiebt man sie in das Hypotenusenquadrat, so bleibt innen ein zum kleinen Kathetenquadrat kongruentes Quadrat übrig.
(Kann man die Rollen vom kleinen und großen Quadrat auch vertauschen?)

Ergänzungsbeweis



Ergänzt man die Figur um die gestrichelten Teile, so erhält man ein großes Quadrat, in welchem die beiden Kathetenquadrate und 4-mal das rechtwinklige Dreieck auftreten. Legt man die vier Dreiecke innerhalb dieses Quadrates um, so erhält man folgende Figur:



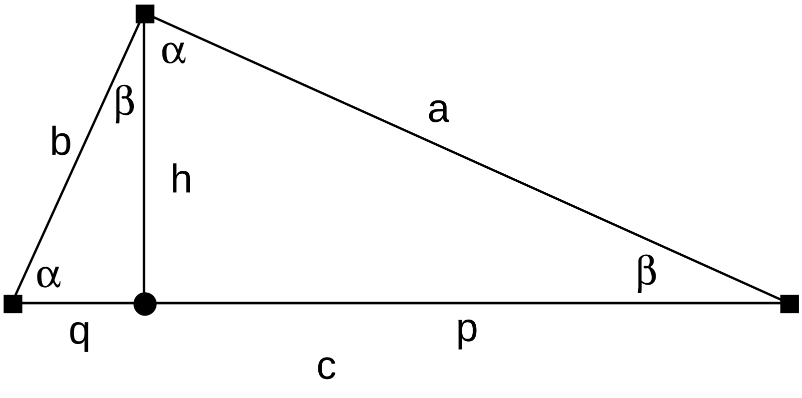
Im Inneren entsteht eine Raute der Seitenlänge c, deren Flächeninhalt so groß ist wie die beiden Kathetenquadrate zusammen. Da an jeder Ecke der Raute die beiden Winkel α und β des Dreiecks auftreten ($\alpha + \beta = 90°$), bleibt für den dritten Winkel auch nur 90° über. Die Raute ist also genau das Hypotenusen quadrat, also $c^2 = a^2 + b^2$.

Dies lässt sich auch algebraisch beweisen: $(a+b)^2 = 4\frac{ab}{2} + c^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2$

oder:
Flächeninhalt des Quadrates, welches die beiden Kathetenquadrate enthält:
$a^2 + b^2 + 4\frac{ab}{2}$
Flächeninhalt des Quadrates, welches das Hypotenusenquadrat enthält:
$4\frac{ab}{2} + c^2$. Aus der Gleichheit dieser beiden Quadrate folgt: $a^2 + b^2 = c^2$

Ähnlichkeitsbeweise

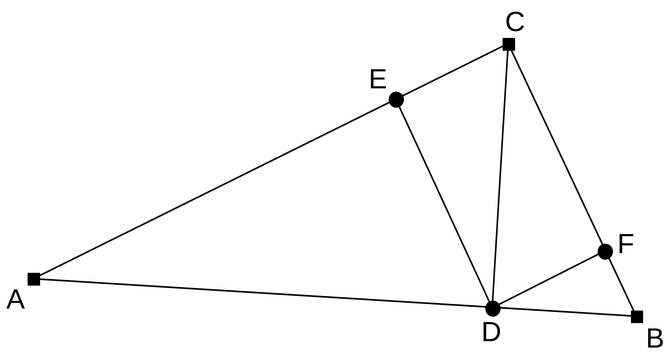
1)



Die beiden Teildreiecke sind untereinander und zum großen Dreieck ähnlich. Durch Anwendung der Ähnlichkeitssätze für Dreiecke folgen der Kathetensatz und der Höhensatz. Aus den beiden Kathetensätzen folgt der Satz des Pythagoras.
Beispiel (Ähnlichkeit des linken Teildreiecks zum großen Dreieck):

$$\frac{b}{q} = \frac{c}{b} \Rightarrow b^2 = c \cdot q$$

2)



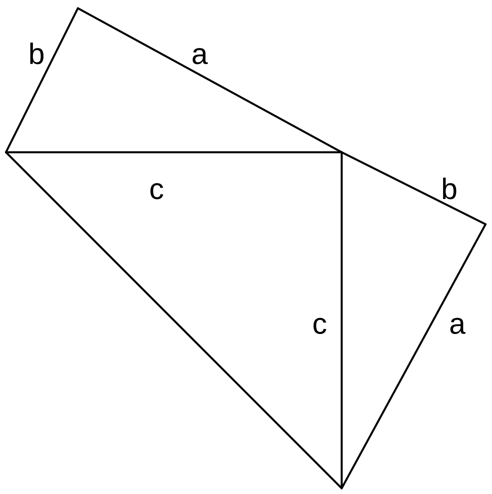
Anwendung der Flächeninhaltssätze liefert:

$$\frac{|BC| \cdot |DF|}{2} + \frac{|AC| \cdot |ED|}{2} = \frac{|AB| \cdot |DC|}{2}$$

Da wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke $\frac{|BC|}{|DF|} = \frac{|AC|}{|ED|} = \frac{|AB|}{|DC|} = k$, folgt durch Einsetzen der Satz des Pythagoras.

Weitere Beweise

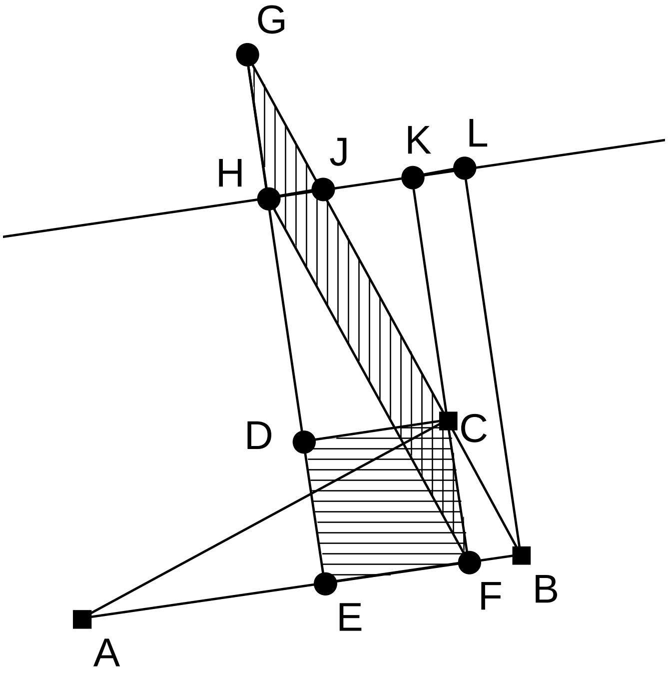
1)

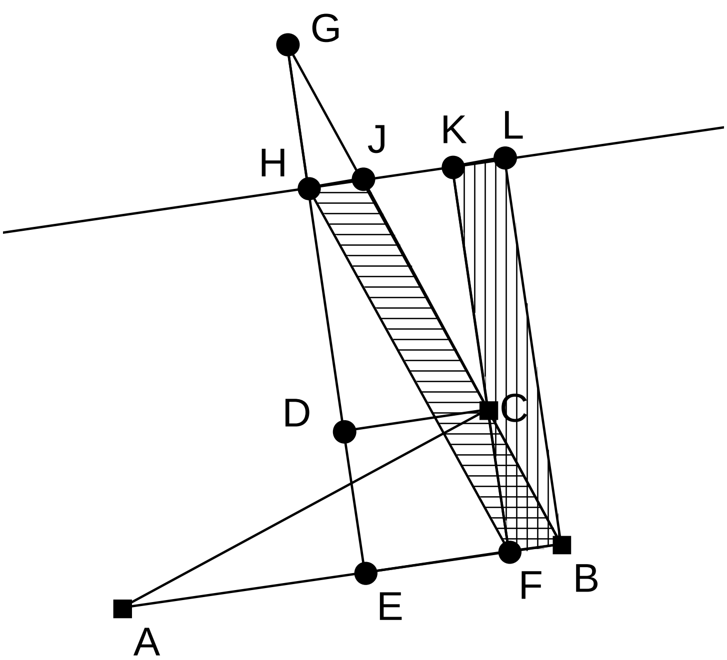


Die gesamte Figur ist ein Trapez, dessen Flächeninhalt auf zwei Arten berechnet werden kann:

$$\frac{a+b}{2}(a+b) = \frac{ab}{2} + \frac{cc}{2} + \frac{ab}{2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

2) Scherungsbeweis für den Höhensatz:





Scherungsfolge: EFCD → FCGH → FBJH → FBLK
Da die Dreiecke AFC und EFH kongruent sind (die Seiten FC und EF sind gleich lang, beide Dreiecke haben einen rechten Winkel, die Winkel ACF und HFA sind genau so

groß wie der Winkel β des Dreiecks ABC – die Schenkel des Winkels ACF stehen paarweise senkrecht auf den Schenkeln des Winkels β, der Winkel HFA ist Stufenwinkel zu β). Somit gilt |HE| = |AF|= q. Da |FB| = p und |FK| = |HE|, hat das Viereck FBLK den Flächeninhalt p·q. Wegen der Flächengleichheit mit dem Quadrat EFCD folgt: $h^2 = p \cdot q$.

Algebraische Beweise der beiden anderen Sätze, falls ein Satz bekannt ist

1) Bekannt: Kathetensatz

$$a^2 = c \cdot p \wedge b^2 = c \cdot q \Rightarrow a^2 + b^2 = cp + cq = c(p+q) = c^2$$

$$b^2 = h^2 + q^2 \wedge b^2 = cq \Rightarrow h^2 = cq - q^2 = q(c-q) = qp$$

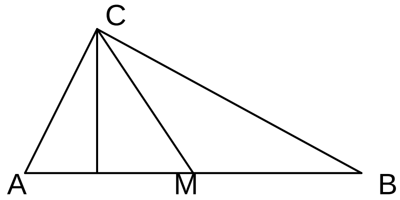
2) Bekannt: Pythagoras

$$h^2 = a^2 - p^2 \wedge h^2 = b^2 - q^2 \Rightarrow 2h^2 = a^2 + b^2 - p^2 - q^2 = c^2 - p^2 - q^2 = (q+p)^2 - p^2 - q^2 = 2qp$$

$$Also: h^2 = qp$$

$$a^2 = h^2 + p^2 = qp + p^2 = p(q+p) = pc$$

Alternative:



$\overline{CM} = \frac{c}{2}$ nach Thalessatz.

$$h^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2} - q\right)^2 = cq - q^2 = q(c-q) = qp$$

III. Ergänzungen und Vertiefungen

Umkehrung des Satzes von Pythagoras

Sei in einem Dreieck $a^2 + b^2 = c^2$. Konstruiere ein weiteres Dreieck mit $a' = a$, $b' = b$ und $\gamma' = 90°$. In diesem Dreieck gilt $a'^2 + b'^2 = c'^2$. W egen $a' = a$ und $b' = b$ gilt daher auch $c'^2 = c^2$, also $c' = c$. Damit sind die beiden Dreiecke kongruent. Es folgt $\gamma = 90°$.

Pythagoräische Zahlentripel

1) Entdeckung einer Formel

a	b	c
3	4	5
6	8	10
5	12	13
12	16	20
15	36	39
8	15	17
16	30	34
140	81	149

Beobachtung: Eine Zahl ist gerade oder alle drei sind gerade. Schreibe die Tabelle so um, dass a gerade ist.

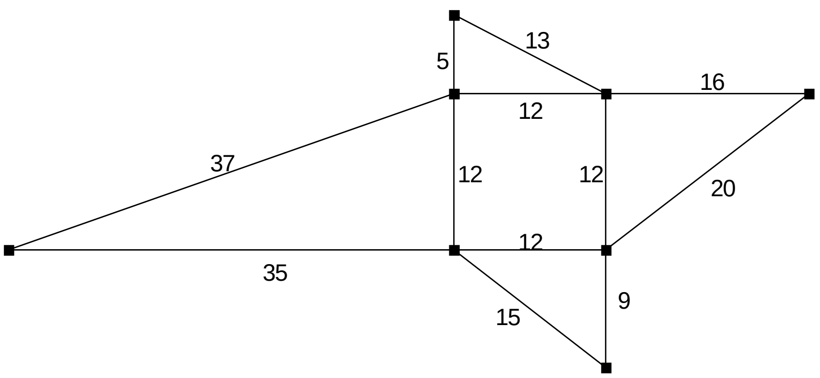
a	b	c
4	3	5
6	8	10
8	6	10
12	5	13
12	16	20
16	12	20
36	15	39
8	15	17
16	30	34
30	16	34
140	81	149

Beobachtung: c – b ist gerade, c – b ist das Doppelte einer Quadratzahl. Wir halten fest: $a = 2x$, $c - b = 2k^2$. Einsetzen in $a^2 + b^2 = c^2$ liefert:

$(2x)^2 + b^2 = (b + 2k^2)^2 \Leftrightarrow 4x^2 = 4bk^2 + 4k^4 \Leftrightarrow b = \left(\frac{x}{k}\right)^2 - k^2$

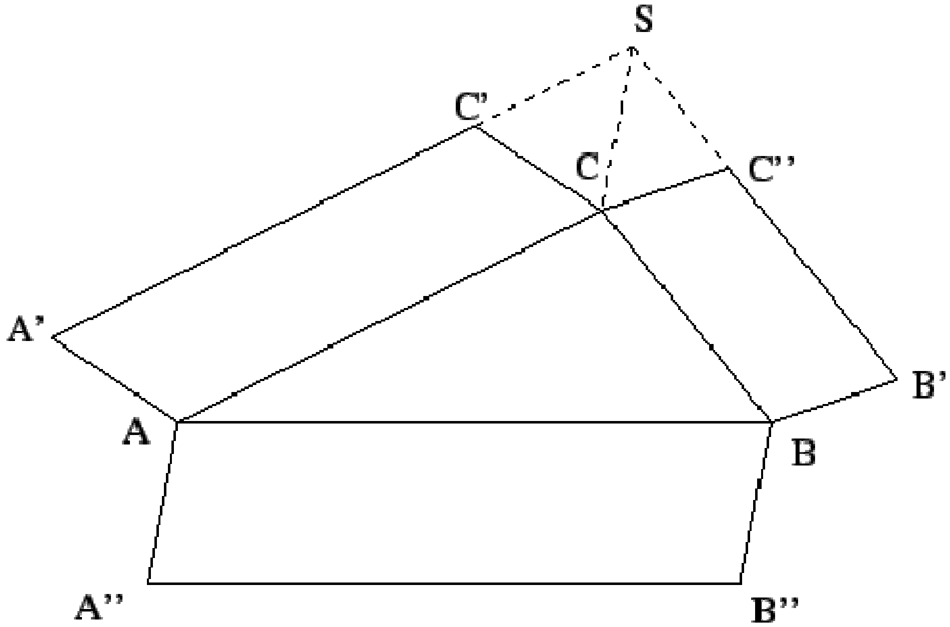
x muss also durch k teilbar sein, also $x = k \cdot l$.
Zusammenfassung: $a = 2 \cdot k \cdot l$, $b = l^2 - k^2$, $c = 2k^2 + l^2 - k^2 = l^2 + k^2$

2) $a = 2mn$, $b = (n^2 - 1)m$, $c = (n^2 + 1)m$
3) Aufgabe aus einem Wettbewerb:
An ein Quadrat mit ganzzahliger Seitenzahl sollen vier rechtwinklige nicht kongruente Dreiecke, die ebenfalls ganzzahlige Seitenzahlen haben, gelegt werden. Welches ist die kleinste Summe aller Kantenlängen?



Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras

1) Über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks werden ähnliche Polygone errichtet. Dann ist die Summe der Flächeninhalte der Kathetenpolygone gleich dem Flächeninhalt des Hypotenusenpolygons.
Beweis mit Hilfe des Ähnlichkeitsfaktors k und der Äquivalenz
$a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow ka^2 + kb^2 = kc^2$
2) Pappos:
ABC ist ein beliebiges Dreieck und *ACC'A*' bzw. *BB'C''C* sind beliebige Parallelogramme über den Seiten AC bzw. BC. Die Geraden *A'C*' und *B'C*'' schneiden sich in *S*. AA'' und BB'' seien parallel zu SC und gleichlang wie SC.
Dann ist die Fläche des Parallelogramms AA''B''B gleich der Summe der Flächen der Parallelogramme ACC'A' und BB'C''C.



(Scherungsbeweis)

3) Gegeben ist ein rechtwinkliges Tetraeder (d.h. die Kanten, die sich in der Spitze schneiden stehen paarweise senkrecht aufeinander). Dann gilt:
In einem rechtwinkligen Tetraeder ist die Summe der Quadrate der drei Seitenflächen gleich dem Quadrat der Fläche des Basisdreiecks.
Beweise:
http://did.mat.uni-bayreuth.de/~matthias/geometrieids/pythagoras/html/node10.html

IV. Anwendungen

Aus der Fülle der Anwendungsprobleme seien hier nur genannt:

1. In ein 250 cm hohes Zimmer führt eine 200 cm hohe und 100 cm breite Tür. Kann ein zusammengebauter Schrank mit den Maßen 240 cm (Höhe), 180 cm (Breite) und 80 cm (Tiefe) in dem Zimmer aufgestellt werden (ohne ihn zu zerlegen)?
2. Wie weit ist für eine Person mit einer Augenhöhe von 170 cm die Horizontlinie entfernt?
3. Die Diagonale eines Fernsehbildschirms mit dem Abbildungsformat 4:3 beträgt 62 cm. Es wird ein Breitwandfilm im Abbildungsmaßstab 16:9 gezeigt. Wie breit sind die „schwarzen Steifen“ an der Schirmseite?
4. Ein Auto der Länge 4,80 m ist zwischen zwei anderen Fahrzeugen geparkt und hat zu diesen jeweils einen Abstand von 0,3 m. Das Fahrzeug ist 1,80m breit. Kann es aus der Parklücke herausfahren?
5. Tunnelproblem (siehe am Anfang dieser Ausführungen)