Reelle Zahlen

Jürgen Zumdick

Möglicher Lehrgang

1. Nicht jedem Punkt des Zahlenstrahles kann eine rationale Zahl zugeordnet werden.

1.1. Konstruktion eines derartigen Punktes

a) Länge der Diagonale im Einheitsquadrat (Pythagoras muss bekannt sein)
b) Seitenlänge eines Quadrats mit dem Flächeninhalt 2 (Zusammensetzung des Quadrats aus vier rechtwinkligen Dreiecken, deren Kathetenlängen jeweils 1 sind)
c) $y = x^2 - 2$: Schnittpunkt der Parabel mit der x-Achse
d) $y = x^2$: Welcher x-Wert liefert den Funktionswert 2

1.2. Beweis, dass $\sqrt{2}$ kein abbrechender Dezimalbruch sein kann:

a) $\sqrt{2}$ liegt zwischen 1, 4 und 1,5. Also gibt es bei der Dezimaldarstellung Stellen hinter dem Komma, die von 0 verschieden sind.
b) Wäre $\sqrt{2}$ ein abbrechender Dezimalbruch, so gäbe es eine „letzte" Ziffer hinter dem Komma, die von 0 verschieden ist. $\left(\sqrt{2}\right)^2$ hätte dann doppelt so viele Stellen hinter dem Komma (mit einer von 0 verschiedenen Ziffer). Dies ist nicht möglich, da $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$.

1.3. Beweis, dass diesem Punkt ($\sqrt{2}$) und anderen ($\sqrt{3}$),($\sqrt{15}$) keine rationale Zahl zugeordnet werden kann (beinhaltet damit auch 1.2):

a) Indirekter Beweis über die Annahme der Existenz einer ausgekürzten Bruchschreibweise
- Langvariante:

  Annahme: $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ und ggT(n, m) = 1

  $\frac{n^2}{m^2} = 2 \Rightarrow n^2\ gerade \Rightarrow n\ gerade \Rightarrow n = 2k$)

  n = 2k in die Ausgangsgleichung eingesetzt liefert $m^2 = 2k^2 \Rightarrow m^2\ gerade \Rightarrow m\ gerade$

  Somit erhält man einen Widerspruch zu ggT(n, m) = 1
- Kurzvariante

  $\frac{n}{m} = \sqrt{2} \wedge \frac{n}{m}\ gekürzt \Rightarrow \frac{n^2}{m^2} = 2 \wedge \frac{n^2}{m^2}\ gekürzt \Rightarrow n^2 = 2$

  Somit erhält man einen Widerspruch zu $n \in N$.

b) Primfaktorzerlegung: $n^2 = 2m^2$. Zerlegt man n und m in Primfaktoren, so steht auf der linken Seite der Gleichung keine 2 oder eine gerade Anzahl des Primfaktors 2 und auf der rechten Seite eine ungerade Anzahl.
c) Endziffernbeweis ($\sqrt{2} = \frac{n}{m}$, ausgekürzt; betrachte die Endziffern von n^2 und $2m^2$)
d) Inkommensurabilitätsbeweis von Seite und Diagonale im Quadrat
e) Inkommensurabilitätsbeweis von Seite und Diagonale im regelmäßigen Fünfeck
f) Handlungsorientierter Nachweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ mit Hilfe der Endziffern von n und m: Beweisen.pdf
g) Überlegung: Weshalb versagen die Beweisverfahren für $\sqrt{4}$?

2. Rechnen mit den Lücken

2.1. Wenn einer Lücke eine Dezimalzahl zugeordnet werden kann, so muss diese nicht abbrechend und nicht periodisch sein (irrationale Zahl). Auch wenn noch nicht nachgewiesen wurde, dass diese Dezimaldarstellungen Zahleigenschaften aufweisen (Ordnungsrelation, Verknüpfungen), so sollte der Begriff Zahl bereits jetzt benutzt werden.

2.2. Eine Lücke kann durch eine Intervallschachtelung $\left([a_n, b_n], a_n, b_n \in Q\right)$ erfasst werden:

a) Jede Intervallschachtelung erfasst höchstens einen Punkt des Zahlenstrahls (indirekter Beweis).
b) Jede Lücke ist durch eine Intervallschachtelung erfassbar.
c) Axiom: Jede Intervallschachtelung erfasst genau einen Punkt.

2.3. Verknüpfung
a) Addition und Subtraktion lassen sich recht einfach mit Hilfe von Intervallschachtelungen erklären.
b) Bei der Multiplikation und Division greife man besser auf Streckmodelle zurück.
c) Die Verknüpfung zweier irrationaler Zahlen kann irrational oder rational sein:

+ bzw. -	rational	irrational
rational	rational (Körpereigenschaft von Q)	siehe links unten
irrational	irrational (Widerspruchsbeweis und Körpereigenschaft von Q)	a) irrational ($\sqrt{2}+\sqrt{2}$) b) rational (0,1010010001...+0,0101101110...)

*	rational	irrational
rational	rational (Körpereigenschaft von Q)	siehe links unten
irrational	irrational (Widerspruchsbeweis und Körpereigenschaft von Q) Ausnahme: Multiplikation mit 0	a) irrational ($\sqrt{2}*\sqrt{3}$) b) rational ($\sqrt{2}*\sqrt{2}$)

Hinweis für die Division: Ist a eine irrationale Zahl, so ist b=1:a ebenfalls irrational. Wäre b rational, so wäre a*b=1, also rational – was nicht sein kann (siehe Tabelle).

Exponent Basis	rational	irrational
rational	rational: 2^2 irrational: $2^{\frac{1}{2}}$	1) rational: $1^{\sqrt{2}}=1$ 2) irrational: entweder $a=2^{\sqrt{2}}$ oder $a^{\frac{1}{2*\sqrt{2}}}$
irrational	rational: $\sqrt{2}^2$ irrational: $\sqrt{2}^3$	3) rational: entweder $b=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ oder $b^{\sqrt{2}}=2$ 4) irrational: entweder $c=\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$ oder $\left(c*\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}}$

Beweis zu 2):
Ist a irrational, so hat man eine entsprechende Potenz gefunden. Ist aber a rational, so ist $\frac{1}{2*\sqrt{2}}$ ein irrationaler Exponent und es gilt: $a^{\frac{1}{2*\sqrt{2}}}=\left(2^{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2*\sqrt{2}}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$ ist irrational.
Beweis zu 3):
Ist b rational, so hat man eine entsprechende Potenz gefunden. Ist aber b irrational, dann ist $b^{\sqrt{2}}$ die gesuchte Potenz.
Beweis zu 4):
Ist c irrational, so hat man eine entsprechende Potenz gefunden. Ist aber c rational, so ist $c*\sqrt{2}$ eine irrationale Basis und es gilt:
$\left(c*\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}}=\left(\sqrt{2}^{\sqrt{3}}*\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}}=\sqrt{2}^{3}\sqrt{2}^{\sqrt{3}}=2*\sqrt{2}*c$ ist irrational (Produkt zweier rationaler und einer irrationalen Zahl).

2.4. Alternativ zu 2.2. und 2.3 kann das Rechnen mit irrationalen Zahlen durch Rechnen mit gerundeten rationalen Zahlen ersetzt werden. In speziellen Fällen kann man natürlich mit irrationalen Zahlen direkt rechnen: $\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\cdot\sqrt{2},\ \sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$

3. **Die rationalen und irrationalen Zahlen liegen dicht**
   a) Vorübungen:
      - Zwischen zwei rationalen Zahlen kann man immer eine weitere rationale Zahl angeben (Mittelwert),
      - Zwischen zwei Zahlen kann man immer eine irrationale Zahl finden (An ein Beispiel gebunden:
        a = 1,45; b = 1,451; c = 1,4501001000100001...)

   b) $\sqrt{2}+\frac{1}{n}$ ist nicht rational (Beweis durch Widerspruch); in jeder Umgebung von $\sqrt{2}$ liegen unendlich viele nicht rationale Zahlen

4. **Abzählbarkeit – Überabzählbarkeit**
   1. Zusammenstellung: $N \subset Z \subset Q \subset R; \quad Q \cup \overline{Q} = R$
   2. Ordne die Mengen nach der Anzahl ihrer Elemente.
      Vermutlich: |N| < |Z| < |Q| < |R|
      Frage: Wie viele Elemente haben die einzelnen Mengen? Erkennen der Problematik (z.B. auch |N| < $|N_0|$.) Erkenntnis: Anzahlen sind nur für endliche Mengen geeignet.
   3. Ziel: Einführung eines neuen „Anzahlbegriffs“ für unendliche Mengen.
      Was unterscheidet obige Mengen?
      a) In N und Z kann man zu jedem Element das nächst größere angeben
      b) N kann man aufsagen (wer das Gegenteil behauptet, muss eine Zahl angeben, die man nicht aufsagen kann)
      c) Z kann man aufsagen
         Vorschlag: 0, 1, 2, 3, 4, ... danach –1, -2, -3, -4, ... (nicht realisierbar)
         Lösung: 0, 1, -1, 2, -2, ...
      d) a) gilt nicht für Q und R; Widerspruchsbeweis: Annahme: Das nächst größere Element zu a sei b. $\frac{a+b}{2}$ liegt zwischen a und b
      e) Gibt es für Q ein Aufsageverfahren? (Vorstellen des Cantorschen Diagonalverfahrens)
   4. Gibt es für R auch ein Aufsageverfahren? (In der Regel kann nur mitgeteilt werden, dass es ein solches Verfahren nicht gibt – ansonsten siehe unter III.)
   5. Definition der Mächtigkeit: endlich, abzählbar, überabzählbar
   6. Da Q abzählbar und R überabzählbar ist, muss $\overline{Q}$ überabzählbar sein.
   7. Ggf.: Wegen der Abzählbarkeit, passt Q in ein beliebig kleines Intervall. Wäre $\overline{Q}$ ebenfalls abzählbar, so passte es ebenfalls in ein beliebig kleines Intervall (Widerspruch, da zwei beliebig kleine Intervalle nicht R ergeben)

III. Ergänzungen

1. Die reellen Zahlen können in rationale und irrationale Zahlen unterteilt werden. Sie können auch in algebraische und nicht algebraische, d.h. transzendente Zahlen unterteilt werden. (Eine Zahl heißt algebraisch, wenn sie Nullstelle eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten ist - $\sqrt{2}$ ist algebraisch, Π nicht). Da Polynome abzählbar sind, sind auch deren Nullstellen abzählbar. Folglich sind algebraische Zahlen abzählbar. Also müssen transzendente Zahlen überabzählbar sein.

2. Nachweis der Überabzählbarkeit von R
   a) Jemand behauptet, alle Zahlen einer Strecke S_1 aufsagen zu können: a_1, a_2, a_3,...
      Nachdem er a_1 aufgesagt hat, wird eine Teilstrecke S_2 von S_1 konstruiert, die a_1 nicht enthält. Allgemein wird nach dem Aufsagen von a_n eine Teilstrecke S_{n+1} von S_n konstruiert, die a_n nicht enthält. Es gilt also: $S_n \supset S_{n+1}$ und $a_n \notin S_{n+1}$
      Hierzu: Dass die S_i einen Punkt gemeinsam haben, gilt nur in R. Konstruiere z.B. eine rationale Schachtelung, durch die x = 0,121221222122221... dargestellt wird.
   b) Diagonalverfahren
      Annahme, R sei abzählbar und die Zahlen seien entsprechend geordnet. Konstruiere eine Zahl mit folgender Eigenschaft: Die n-te Dezimalstelle sei von der n-ten Dezimalstelle der n-ten Zahl verschieden $(n \in N)$. Es ergibt sich ein Widerspruch, da diese Zahl durch das Abzählverfahren

nicht erfasst ist. Der Beweis funktioniert nicht in Q, da die so konstruierte Zahl nicht abbrechend und nicht periodisch ist.

3. Z ist ein Ring, Q ist ein (archimedisch angeordneter) Körper, R ist ein vollständiger (archimedisch angeordneter) Körper (das Intervallschachtelungsaxiom gilt nicht in Q).

4. Die Bedeutung des Intervallschachtelungsprinzips zur Vorbereitung des Grenzwertbegriffs:
   a) Flächeninhalt eines Kreises
   b) Pyramidenvolumen
   c) Strahlensätze (im Falle der Inkommensurabilität)

5. Fachwissenschaftliche Hintergründe zum Körperbegriff
   a) Körper (R_p)
   b) Angeordnete Körper (Polynomquotientenkörper)
   c) Archimedisch angeordnete Körper (Q)
   d) Vollständig archimedisch angeordnete Körper (R)