Schwerpunkte

Jürgen Zumdick

I. Schwerpunkt eines n-Ecks

1. Schwerpunkt eines Dreiecks

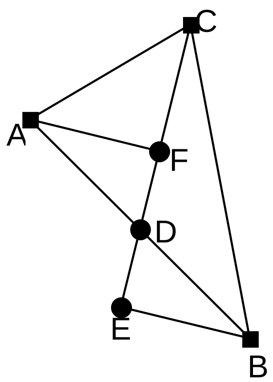
a) Geometrische Konstruktion mit Hilfe der Seitenhalbierenden oder mit Hilfe der Strahlensätze (vgl. den Fall n = 3 unter II.)

b) Die Koordinaten des Schwerpunkts ergeben sich als Mittelwerte der Koordinaten der Eckpunkte.

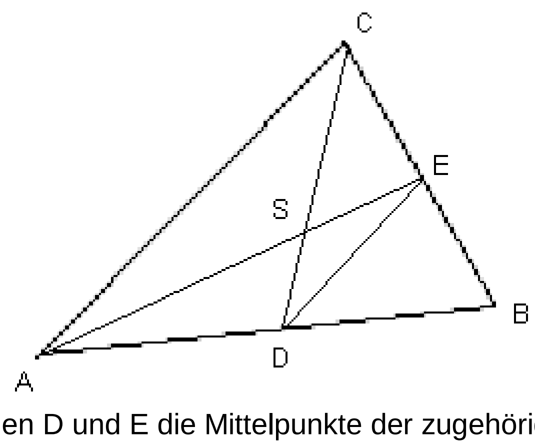
c) Experimentelle Ermittlung: Das Dreieck wird frei beweglich an einem Eckpunkt aufgehängt. An diesem Punkt wird ein an einem Seil hängendes Lot befestigt. Die Spur des Seiles wird auf dem Dreieck gezeichnet. Durch Wiederholung des Vorgangs mit anderen Eckpunkten ergibt sich der Schwerpunkt als Schnittpunkt dieser Lotgeraden.

d) Beweise:

1. Setzung: Der Schwerpunkt liegt auf einer Linie, die das Dreieck in 2 Teile zerlegt, welche gleichen Flächeninhalt haben. Die folgende Zeichnung verdeutlicht, dass diese Linie die Seitenhalbierende ist:



Da die Dreiecke ADC und DBC gleichen Flächeninhalt haben, müssen die Höhen AF und EB gleich lang sein. Da AF und EB parallel sind, folgt wegen des Strahlensatzes, dass AD und DB gleich lang sind. Also ist D Mittelpunkt der Seite AB.
Dass der Schwerpunkt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1 teilt, lässt sich mit Hilfe der Strahlensätze oder mit einer Vektorkette beweisen.
Beweis mit Hilfe der Strahlensätze:



Seien D und E die Mittelpunkte der zugehörigen Seiten. Dann gilt wegen der Umkehrung des 1. Strahlensatzes (B als Scheitelpunkt), dass DE und AC parallel sind. Nach dem 2. Strahlensatz folgt dann, dass DE halb so lang ist wie AC. Wendet man nun den 2. Strahlensatz auf die Figur mit S als Scheitelpunkt an, so folgt: $\frac{AS}{SE} = \frac{AC}{DE} = \frac{2}{1}$

Vektorieller Beweis:

Im vorstehenden Dreieck sei $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Dann folgt:

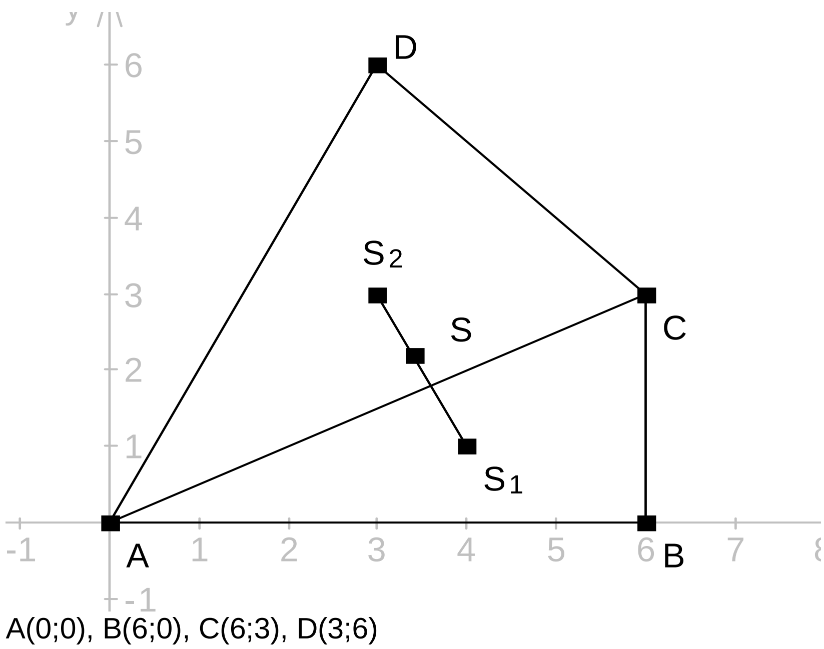
$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DS} + \overrightarrow{SA} = \vec{O} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\vec{a} + k \cdot \left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}\right) + l \cdot \left(\vec{a} + \frac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{a}\right)\right) = \vec{O} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}l\right) \cdot \vec{a} + \left(k + \frac{1}{2}l\right) \cdot \vec{b} = \vec{O}$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren müssen die Vorfaktoren 0 sein. Das zugehörige lineare Gleichungssystem hat dann die Lösungen $l = -\frac{2}{3} \wedge k = -\frac{1}{3}$. Somit teilt S die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1. Dieses Teilungsverhältnis ergibt sich analog für ein anderes Paar von Seitenhalbierenden. Damit schneiden sich alle drei Seitenhalbierenden in S.

2. Der Schwerpunkt einer Strecke AB ist deren Mittelpunkt M. Wird die Strecke AB zum Dreieck ABC erweitert, so liegt der Schwerpunkt des Dreiecks auf der Strecke CM. Vereinigt man die Gewichte von A und B auf M, so hat M gegenüber C doppeltes Gewicht. Also ist CM im Verhältnis 2:1 aufzuteilen.

2. Schwerpunkt eines Vierecks



A(0;0), B(6;0), C(6;3), D(3;6)

Bestimme den Schwerpunkt des Dreiecks ABC: $S_1(x_1;y_1) = S_1(4;1)$

Bestimme den Schwerpunkt des Dreiecks ACD: $S_2(x_2;y_2) = S_2(3;3)$

S_1 repräsentiert das Gewicht, d.h. die Fläche F_1 des Dreiecks ABC (= 9), S_2 repräsentiert die Fläche F_2 des Dreiecks ACD (= 13,5). Also muss S(x;y) die Gesamtfläche F = 22,5 repräsentieren. Nach den Hebelgesetzen gilt:

$$x \cdot F = x_1 \cdot F_1 + x_2 \cdot F_2 \wedge y \cdot F = y_1 \cdot F_1 + y_2 \cdot F_2$$

Es folgt x = 3,4 und y = 2,2.

Dieses Ergebnis erhält man auch, wenn man die Strecke S_1S_2 im Verhältnis der Flächengewichte aufteilt: $\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{13{,}5}{9} \wedge \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{13{,}5}{9}$

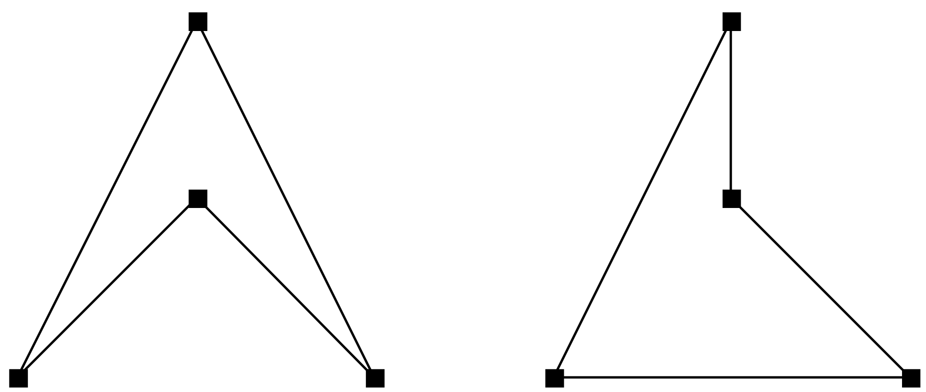
3. Schwerpunkt eines n-Ecks

Das Verfahren unter 2. wird nun sukzessive fortgesetzt. Ist z.B. ein 5-Eck gegeben, so teilt man es in ein Viereck und ein Dreieck, berechnet den Schwerpunkt S_1 des 4-Ecks und den Schwerpunkt S_2 des 5-Ecks, um schließlich mit dem Verfahren unter 2. den Schwerpunkt S des 5-Ecks zu bestimmen.

II. Schwerpunkt einer n-Punktwolke

Begriffsklärung:

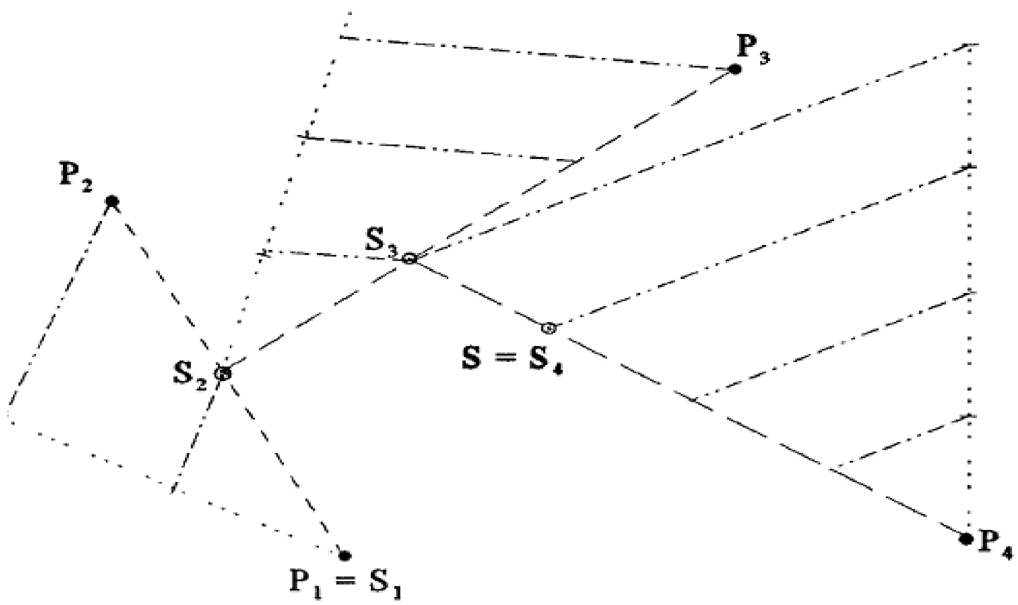
Zunächst muss man eine n-Punktwolke von einem n-Eck unterschieden. Die sei am Beispiel n = 4 verdeutlicht. Aus 4 Punkten lassen sich verschiedene Vierecke bilden:



1. Konstruktion

Gegeben sind die Punkte P_n. Es werden sukzessive die Schwerpunkte S_k der Punktmengen $\{P_k \mid k = 1 \text{ bis } n\}$.

Da der Schwerpunkt S_k genau k Punkte repräsentiert muss die Verbindungsstrecke von S_k zum nächsten Schwerpunkt S_{k+1} im Verhältnis1:k aufgeteilt werden. Für den Fall n = 4 wird dies im nachfolgenden Bild mit Hilfe des Strahlensatzes zeigt



Im Falle n = 3 ist der Schwerpunkt einer n-Punktwolke mit dem Schwerpunkt eines n-Ecks identisch.

2. Rechnung
   Analog zur vorstehenden Vorgehensweise ergibt sich die rechnerische Lösung:
   S_2 als Mittelpunkt von P_1P_2 hat die Koordinaten $\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right)$
   Die x-Koordinate von S_3 ist $\frac{1}{3}x_3+\frac{2}{3}\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$
   Analog folgt, dass die Koordinaten des Schwerpunkts das arithmetische Mittel der Koordinaten aller Punkte der Punktwolke sind.

3. Schwerpunktberechnung falls die Punkte unterschiedliche Gewichte haben (Beispiel für n = 3)
   Gegeben sind die Punkte $P_1(x_1\,;\,y_1)$, $P_2(x_2\,;\,y_2)$, $P_3(x_3\,;\,y_3)$ mit den zugehörigen Gewichten g_1, g_2, g_3. $S_i(u_i;\,v_i)$ seien die sukzessiv berechneten Schwerpunkt mit $S_1 = P_1$, S_2 Schwerpunkt von S_1P_2 und S_3 Schwerpunkt von S_2P_3. Dann gilt:
   $u_2=x_1+\frac{g_2}{g_1+g_2}\cdot\left(x_2-x_1\right)$ und $u_3=x_2+\frac{g_3}{g_1+g_2+g_3}\cdot\left(x_3-u_2\right)$
   Analoges folgt für v_i und für eine Verallgemeinerung auf n Punkte.