Verschiedene Methoden zur Abstands- und Entfernungsberechnung bei windschiefen Geraden am Beispiel einer Flugroutenaufgabe.

Jürgen Zumdick

Aufgabe:
Ein Charterflugzeug und ein Linienflugzeug befinden sich auf geradlinigem Kurs. Im örtlichen Koordinatensystem gelten die folgenden Angaben:

	Standort zum Zeitpunkt 0	Geschwindigkeitsvektor
Charterflugzeug	A(0/4/2)	$\vec{v} = \begin{pmatrix} 200 \\ -100 \\ 0 \end{pmatrix}$
Linienflugzeug	B(3/0/3)	$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 500 \\ -100 \end{pmatrix}$
	(Angaben in km)	(Angaben in km/h)

a) Berechne den Abstand der beiden Flugrouten
b) Gib die Punkte P und Q auf den Flugrouten an, deren Abstand gleich dem Abstand der Flugrouten ist.
c) Bestimme die kleinste Entfernung, welche die beiden Flugzeuge voneinander haben.

Lösung:

a)

Die beiden Flugrouten sind:

c: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ -100 \\ 0 \end{pmatrix}$

l: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 500 \\ -100 \end{pmatrix}$

1. **Möglichkeit, um den Abstand zu berechnen:**
   a) Bestimme eine Ebene E, die c enthält und parallel zu l ist.
   b) Wähle einen Punkt P von l und bestimme seinen Abstand zu E.
   Um den Abstand eines Punktes P von einer Ebene E zu bestimmen. Gehe wie folgt vor:
   Bestimme eine Gerade g, die senkrecht auf E steht und durch P läuft.
   Bestimme deren Schnittpunkt T mit E. Bestimme den Abstand der Punkte P und T (dies ist der gesuchte Abstand der beiden windschiefen Geraden).

Schritt a):

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ -100 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 500 \\ -100 \end{pmatrix}$$

Für die weitere Rechnung ist es nützlich, die Gleichung in die Normalenform zu überführen.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 200 \\ -100 \\ 0 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 0 \\ 500 \\ -100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10000 \\ 20000 \\ 100000 \end{pmatrix} = 10000 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$E : \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} = 28$$

Schritt b):

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Schnitt von g mit E:

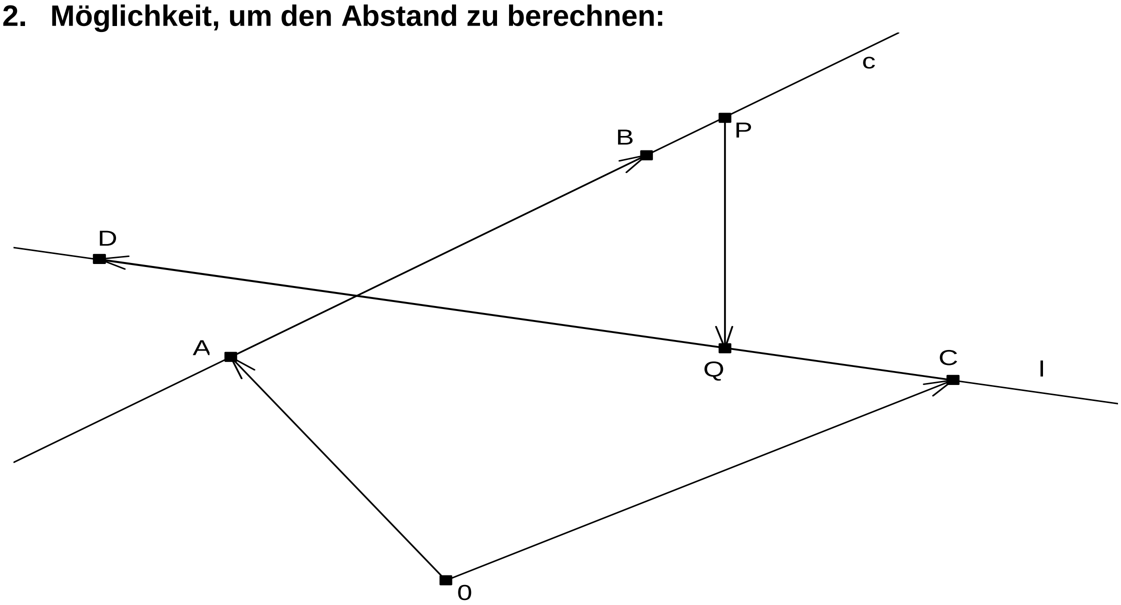
$$\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} = 28 \Leftrightarrow 33 + k \cdot 105 = 28 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{21}$$

Also folgt: $\vec{t} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{21} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{20}{21} \\ -\frac{2}{21} \\ 2\frac{11}{21} \end{pmatrix}$

Damit ergibt sich der Abstand: $\left| \vec{PT} \right| = \left| \begin{pmatrix} \frac{1}{21} \\ \frac{2}{21} \\ \frac{10}{21} \end{pmatrix} \right| = \frac{\sqrt{105}}{21} = 0{,}488$

Der Abstand der Flugrouten beträgt also 0,488 km.

2. Möglichkeit, um den Abstand zu berechnen:



($\vec{OA}, \vec{OC}$ Stützvektoren, $\vec{AB}, \vec{CD}$ Richtungsvektoren)
Es gilt:
$\vec{OA} + \vec{AP} + \vec{PQ} + \vec{QC} + \vec{CO} = \vec{0}$ und $\vec{n} = \vec{PQ}$ senkrecht auf beiden Geraden steht.

Also folgt: $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ -100 \\ 0 \end{pmatrix} + d \cdot \vec{n}^0 + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 500 \\ -100 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{0}$, wobei $\vec{n}^0$ der auf die Länge 1 normierte Vektor $\vec{n}$ ist. d gibt den Abstand der beiden windschiefen Geraden an, mit r und s lassen sich die beiden zugehörigen Punkte auf den Geraden berechnen.

Wie bei 1. kann man $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$ wählen. Da $\left|\vec{n}\right| = \sqrt{105}$, folgt $\vec{n}^0 = \frac{1}{\sqrt{105}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Es ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$200r + \frac{d}{\sqrt{105}} - 3 = 0$$

$$4 - 100r + \frac{2d}{\sqrt{105}} + 500s = 0$$

$$2 + \frac{10d}{\sqrt{105}} - 100s - 3 = 0$$

Die erste Gleichung wird nach r aufgelöst und r in der zweiten Gleichung ersetzt. Man erhält dann mit der zweiten und dritten Gleichung zwei Gleichungen mit den Variablen d und s:

$$\frac{2{,}5d}{\sqrt{105}} + 500s = -2{,}5$$

$$\frac{10d}{\sqrt{105}} - 100s = 1$$

Es folgt:

$$s = \frac{-11}{2100} = -0{,}0052$$

$$d = \frac{1}{21}\sqrt{105} = 0{,}488$$

und schließlich r = 0,0148
Der Abstand der beiden Flugrouten beträgt somit d = 0,488 km.

3. Möglichkeit, um den Abstand zu berechnen:
P sei ein Punkt auf c und Q ein Punkt auf l:

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ -100 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 500 \\ -100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ -100 \\ 0 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 500 \\ -100 \end{pmatrix}$$

$$\left|\vec{PQ}\right| = \sqrt{(-3 + 200r)^2 + (4 - 100r - 500s)^2 + (-1 + 100s)^2}$$

Bestimme mit Hilfe der Differentialrechnung bei festem Q denjenigen Punkt P auf c, der von Q den geringsten Abstand hat. Dazu wird folgende Funktion betrachtet (vgl. auch Teil c):

$$f(r) = (-3+200r)^2 + (4-100r-500s)^2 + (-1+100s)^2 \Leftrightarrow$$

$$f(r) = 50000r^2 - 2000r + 100000rs - 4200s + 260000s^2 + 26$$

$$f'(r) = 100000r - 2000 + 100000s$$

$$f'(r) = 0 \Leftrightarrow r = -s + \frac{1}{50}$$

Da der Graph eine nach oben geöffnete Parabel ist, liegt eine Minimalstelle vor. Für diese Minimalstelle gilt:

$$g(s) = (-3-200s+4)^2 + (4+100s-2-500s)^2 + (-1+100s+2)^2 \Leftrightarrow$$

$$g(s) = 210000s^2 - 2200s + 6$$

$$g'(s) = 420000s - 2200$$

$$g'(s) = 0 \Leftrightarrow s = \frac{11}{2100}$$

Da der Graph ebenfalls eine nach oben geöffnete Parabel ist, liegt eine Minimalstelle vor.

Es folgt: $r = \frac{31}{2100}$

und damit

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{31}{2100} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ -100 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}95 \\ 2{,}52 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{11}{2100} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 500 \\ -100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2{,}62 \\ 2{,}48 \end{pmatrix}$$

und folglich

$$\left|\vec{PQ}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 2{,}62 \\ 2{,}48 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2{,}95 \\ 2{,}52 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0{,}05 \\ 0{,}1 \\ 0{,}48 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0{,}05^2 + 0{,}1^2 + 0{,}48^2} = 0{,}49$$

b)

P sei der gesuchte Punkt auf c und Q der gesuchte Punkt auf l. Für die zugehörigen Ortsvektoren ergibt sich:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + 0{,}0148 \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ -100 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}96 \\ 2{,}52 \\ 2 \end{pmatrix} \; und \; \vec{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 0{,}0052 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 500 \\ -100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2{,}6 \\ 2{,}48 \end{pmatrix}$$

Da die Skalare Stunden gemessen werden, erreicht das Charterflugzeug ca. 53 s nach dem Zeitpunkt 0 den Punkt P und das Linienflugzeug ca. 19 s nach dem Zeitpunkt 0 den Punkt Q.

c)

Nach k Stunden befindet sich die Chartermaschine beim Punkt C mit dem Ortsvektor

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 200 \\ -100 \\ 0 \end{pmatrix}$$ und die Linienmaschine beim Punkt L mit dem Ortsvektor

$$\vec{l} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 500 \\ -100 \end{pmatrix}.$$

Die Entfernung der beiden Flugzeuge beträgt dann

$$\left|\vec{CL}\right| = \sqrt{(200k-3)^2 + (4-100k-500k)^2 + (2-3+100k)^2} = \sqrt{410000k^2 - 6200k + 26}$$

Die Entfernung ist eine Funktion von k. Um das Minimum dieser Funktion zu bestimmen, kann auch das Minimum des Quadrats dieser Funktion bestimmt werden (da die Funktionswerte positiv sind):

$$f(k) = 410000k^2 - 6200k + 26$$

$$f'(k) = 820000k - 6200$$

$$f''(k) = 820000$$

Da $f'(0{,}0076) = 0 \wedge f''(0{,}0076) > 0$ liegt an der Stelle k = 0,0076 ein Minimum vor.

Die minimale Entfernung zwischen den beiden Flugzeugen ist also

$\sqrt{410000 \cdot 0{,}0076^2 - 6200 \cdot 0{,}0076 + 26} = 1{,}6$ [km]. Diese wird ca. 27s nach dem Zeitpunkt 0 erreicht.