# Wege und Irrwege in einem Problemlöseprozess

**(Mathematische Inhalte: Strahlensätze, Satz des Pythagoras, Flächeninhaltssätze, quadratische Gleichungen, Substitutionsverfahren, Extremwertbestimmung)**

**Jürgen Zumdick**

Problem: Eine Leiter der Länge l wird an eine Wand, aus der ein würfelförmiger Sockel der Kantenlänge 1 herausragt, gelehnt. In welcher Höhe stößt die Leiter an die Wand? Dabei soll die Leiter zur Abstützung den Sockel berühren.

## 1. Anfertigen einer Skizze

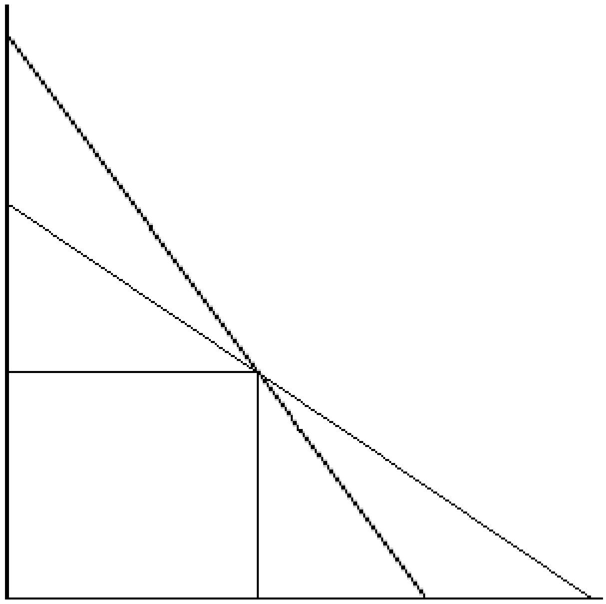

**Abbildung 1**

Sind zwei Lösungen möglich, so soll die Leiter möglichst hoch reichen.

## 2. Einführung von Bezeichnungen

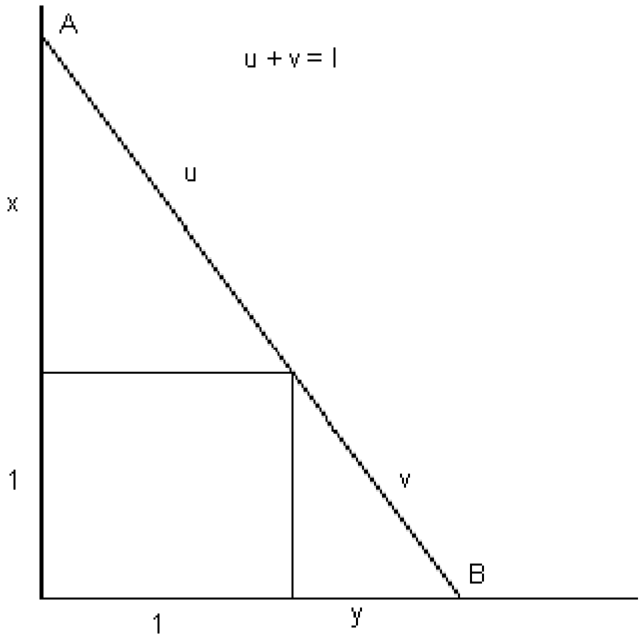


**Abbildung 2**

3. **Welche bereits bekannten Lehrsätze sind anwendbar?**

a) 1. Strahlensatz mit A als Scheitelpunkt: $\frac{x}{x+1}=\frac{u}{l}$

b) 2. Strahlensatz mit A als Scheitelpunkt: $\frac{x}{x+1}=\frac{1}{1+y} \Leftrightarrow x\cdot y=1$

c) 1. Strahlensatz mit B als Scheitelpunkt: $\frac{y}{y+1}=\frac{v}{l}$

d) 2. Strahlensatz mit B als Scheitelpunkt: $\frac{y}{y+1}=\frac{1}{x+1} \Leftrightarrow x\cdot y=1$

e) Die Fläche des großen Dreiecks setzt sich aus drei Teilflächen zusammen:
$$\frac{(x+1)\cdot(y+1)}{2}=\frac{x\cdot 1}{2}+1+\frac{y\cdot 1}{2} \Leftrightarrow x\cdot y=1$$

f) Satz des Pythagoras im oberen Dreieck: $x^2+1=u^2$

g) Satz des Pythagoras im unteren Dreieck: $y^2+1=v^2$

h) Satz des Pythagoras im großen Dreieck: $(x+1)^2+(y+1)^2=l^2$

i) $u=l-v$

4. **Das Einsetzverfahren bietet sich für weitere Umformungen an.**

Aus a) und i) folgt: j) $x=\frac{l-v}{v}$.

Aus c) und i) folgt: k) $y=\frac{v}{l-v}$.

Aus diesen beiden Gleichungen folgt ebenfalls: $x\cdot y=1$

Mit den Gleichungen b), f), g) und i) hat man 4 Gleichungen mit 4 Unbekannten. Mit dem Einsetzverfahren folgt man aus diesen Gleichungen:

$$x^2+1=u^2 \wedge \left(\frac{1}{x}\right)^2+1=(l-u)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{u^2-1}+1=(l-u)^2 \Leftrightarrow u^2=(l-u)^2\cdot(u^2-1)$$

Das Auflösen der Klammern führt auf eine Gleichung, die mit den üblichen Mitteln nicht zu lösen ist.

5. **Gibt es noch nicht benutzte Gleichungen?**

Gleichung h) wurde noch nicht benutzt, also wird diese nun näher untersucht. Das Auflösen der Klammern liefert: $x^2+2x+1+y^2+2y+1=l^2$.

Mit dem Einsetzverfahren und den Gleichungen f), g) und i) folgt hieraus:
$$u^2+2x+v^2+2y=(u+v)^2 \Leftrightarrow x+y=u\cdot v$$

Diese Gleichung und die Gleichungen j), k) und i) ergeben folgendes System:

$$x+y=u\cdot v \wedge x=\frac{u}{v} \wedge y=\frac{v}{u} \wedge l=u+v \Leftrightarrow \frac{u}{v}+\frac{v}{u}=u\cdot v \wedge l=u+v$$
$$\Leftrightarrow u^2+v^2=(u\cdot v)^2 \wedge l=u+v$$

**Blick zurück:**

Ersetzt man in der letzten Gleichung von Abschnitte 4 l – u durch v und löst die Klammern auf, so erhält man dasselbe System.

6. **Was wurde beim Lösen quadratischer Gleichungen noch gelernt?**

Es rückt das Verfahren der „quadratischen Ergänzung“ in den Blick.

$u^2 + v^2 = (u \cdot v)^2 \Leftrightarrow u^2 + v^2 + 2 \cdot u \cdot v = (u \cdot v)^2 + 2 \cdot u \cdot v \Leftrightarrow (u+v)^2 = (u \cdot v)^2 + 2 \cdot u \cdot v$

$\Leftrightarrow l^2 = (u \cdot v)^2 + 2 \cdot u \cdot v$

Fasst man nun $u \cdot v$ als eine Variable z auf, so erhält man eine quadratische Gleichung:

$l^2 = z^2 + 2z$

Daraus ergibt sich die für das Sachproblem gültige Lösung: $z = -1 + \sqrt{1+l^2}$

Rücksubstitution liefert:

$u \cdot (l-u) = -1 + \sqrt{1+l^2} \Leftrightarrow u^2 - u \cdot l - 1 + \sqrt{1+l^2} = 0$

Dies ist eine quadratische Gleichung mit den Lösungen: $u = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} + 1 - \sqrt{1+l^2}}$ .

Da $v = l - u$, folgt: $v = \frac{l}{2} \mp \sqrt{\frac{l^2}{4} + 1 - \sqrt{1+l^2}}$ .

Die Variablen u und v „tauschen also ihre Rollen“. Entsprechend der Festlegung im 1. Abschnitt kommt nur die erste Lösung in Betracht.

**7. Einordnen der Lösung in einen größeren Zusammenhang**

**Funktionsbeziehung**

Sei h(l) die Funktion, die in Abhängigkeit von l die Höhe angibt, an der die Leiter an die Wand stößt, so gilt wegen Gleichung f):

$$h(l) = \sqrt{\left(\frac{l}{2} + \sqrt{\frac{l^2}{4} + 1 - \sqrt{1+l^2}}\right)^2 - 1} + 1 .$$

Der Graph sieht wie folgt aus:

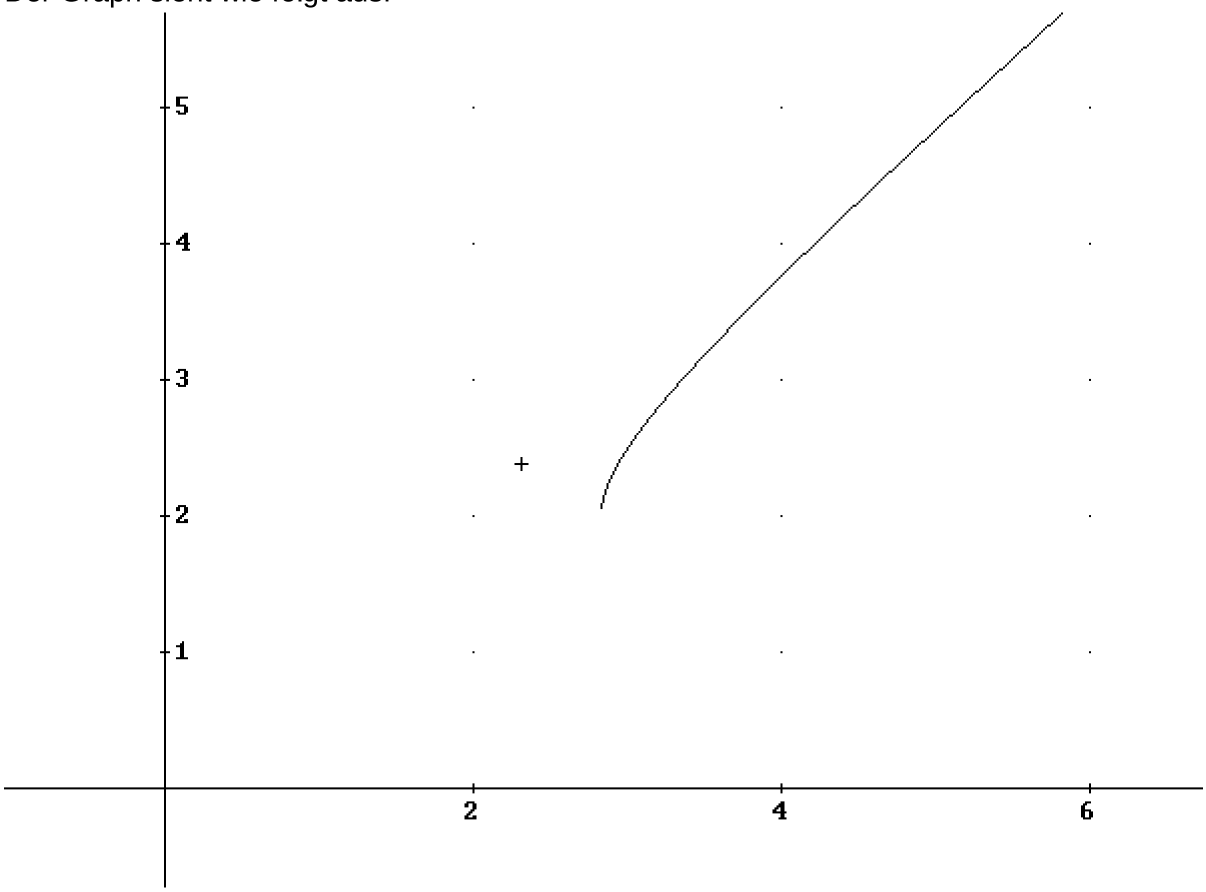


**Abbildung 3**

**Welches ist die kleinste Leiterlänge?**
**a) Plausibilitätsbetrachtung**

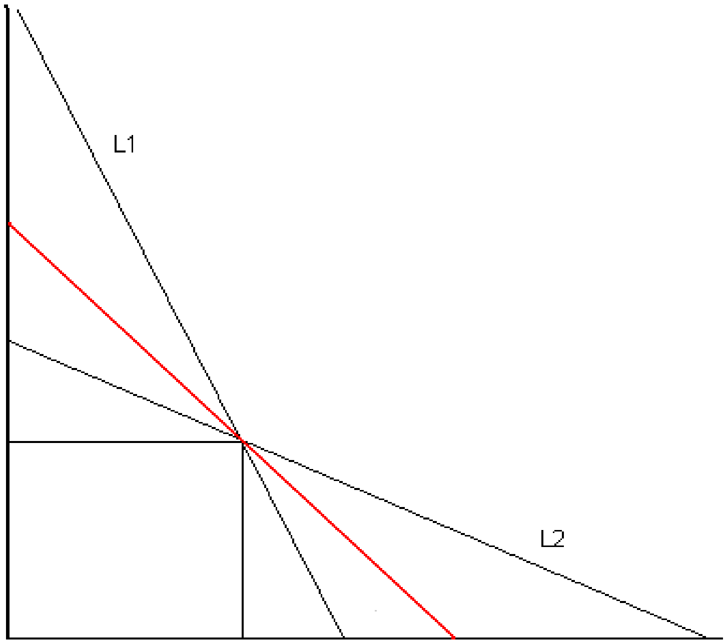


**Abbildung 4**

Zu jeder Leiterlänge gibt es zwei Lagemöglichkeiten für die Leiter (L1 und L2). Je länger die Leiter ist, desto steiler bzw. flacher muss sie angelegt werden. Also gibt es für die kürzeste Leiter nur eine Lagemöglichkeit (rote Leiter). Dies ist der Fall, wenn x = y (siehe Abbildung 2). Dann folgt aus Gleichung b) x = y = 1 und schließlich aus den Gleichungen f) und g) $u = v = \sqrt{2}$ und somit als kleinste Leiterlänge $2 \cdot \sqrt{2}$.

**b) Rechnerischer Nachweis**

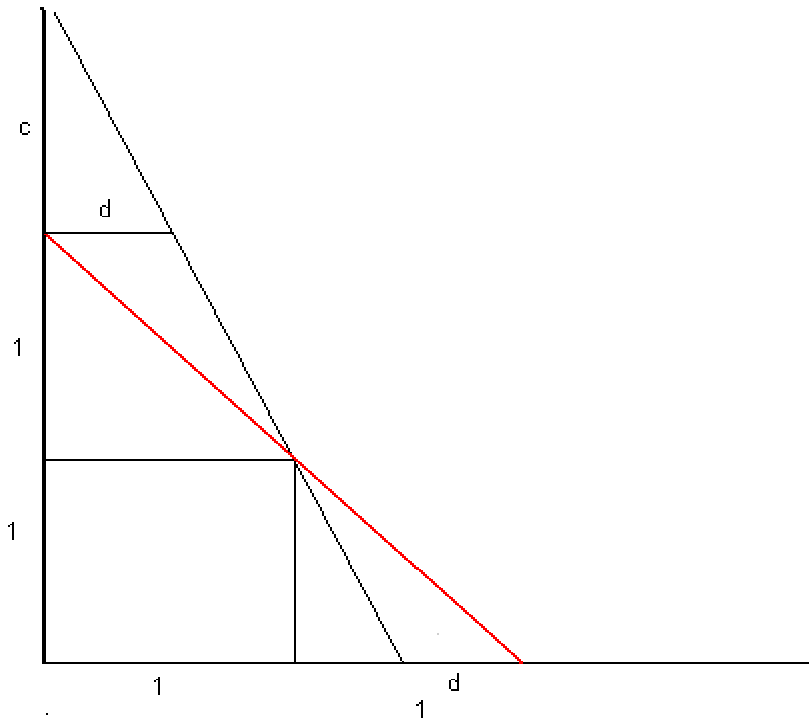


**Abbildung 5**

Für x > y gilt x = 1 + c und y = 1 – d, mit c, d > 0.
Es folgt wegen Gleichung h):

$$l^2 = (1+c+1)^2 + (1-d+1)^2 = 4+4\cdot c+c^2+4-4\cdot d+d^2 = 8+4\cdot(c-d)+c^2+d^2 > 8$$

( Im oberen Dreieck der Abbildung 5 ist der Winkel, der c gegenüberliegt, größer als 45° und der Winkel, der d gegenüberliegt, kleiner als 45°. Nach der Dreiecksungleichung ist daher c größer als d. )

Alle Leitern mit x >y sind also länger als $\sqrt{8} = 2\cdot\sqrt{2}$ . Aus Symmetriegründen gilt dies natürlich auch für Leitern mit x <y. Die kleinste Leiterlänge ergibt sich also für x = y. Diese beträgt - wie unter a) bereits gezeigt - $2\cdot\sqrt{2}$ .

**c) Kann das Ergebnis auf andere Weise verifiziert werden?**

Der kleinste Funktionswert von h(l) ergibt sich, wenn die mittlere Wurzel im Funktionsterm 0 wird:

$$\frac{l^2}{4}+1-\sqrt{1+l^2} = 0 \Rightarrow \left(\frac{l^2}{4}+1\right)^2 = 1+l^2 \Leftrightarrow \frac{l^4}{16}+\frac{l^2}{2}+1 = 1+l^2 \Leftrightarrow \frac{l^4}{16} = \frac{l^2}{2} \Rightarrow l = 2\cdot\sqrt{2}$$