Markoff-Ketten

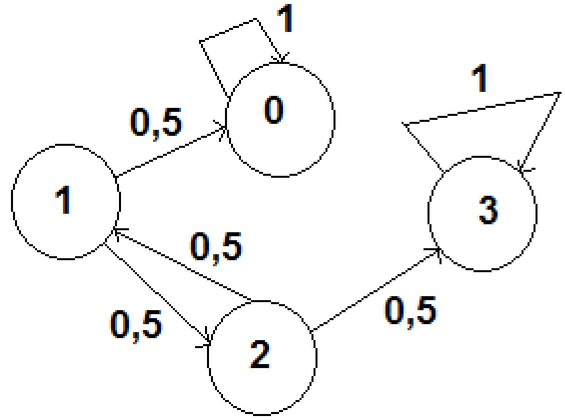
Jürgen Zumdick

Inhalt:

Einführungsbeispiel und Lösungsmethoden

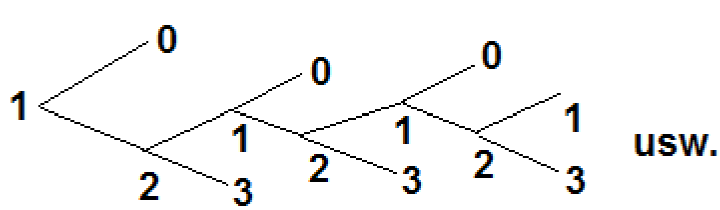
Ein Spieler hat ein Kapital von 1 €. Eine Münze wird geworfen. Erscheint „Zahl", so erhält er einen Euro, ansonsten verliert er einen Euro. Er hört auf, wenn er 3 € besitzt oder kein Kapital mehr hat. Wie groß ist seine Verlustwahrscheinlichkeit?

Die Situation wird in einem Übergangsgraphen dargestellt:



Der Graph hat 4 Zustände, welche die möglichen Kapitalien darstellen. „1" ist der Startzustand. „0" und „3" sind Endzustände bzw. Randzustände. Interessiert man sich für den Verlust, so ist „0" der absorbierende Randzustand. „2" ist ein Zwischenzustand. An den Pfeilen sind die Übergangswahrscheinlichkeiten eingezeichnet. Hat man den Zustand „0" oder „3" erreicht, so ist das Spiel beendet, d.h. die Wahrscheinlichkeit, in diesem Zustand zu verbleiben, beträgt 1.
Um die Verlustwahrscheinlichkeit zu bestimmen, werden verschiedene Verfahren vorgestellt.

1. **Anwendung der Pfadregeln:**



An den Teilpfaden steht jeweils die Wahrscheinlichkeit 0,5. Die Verlustwahrscheinlichkeit p berechnet sich nach den Pfadregeln wie folgt:
$p = 0{,}5 + 0{,}5^3 + 0{,}5^5 + 0{,}5^7 + \ldots$

Der rechte Term stellt eine unendliche geometrische Reihe mit dem Anfangsglied a = 0,5 und dem Faktor q = 0,5² dar. Für die Summe s einer unendlichen geometrischen Reihe gilt: $s = a \cdot \frac{1}{1-q}$. Somit folgt $p = 0{,}5 \cdot \frac{1}{1-0{,}5^2} = \frac{2}{3}$

2. **Grenzwert einer Übergangsmatrix**
   Aus dem Übergangsgraphen lässt sich folgende spaltenstochastische Matrix aufstellen:

Von Nach	1€	0€	2€	3€
1€	0	0	0,5	0
0€	0,5	1	0	0
2€	0,5	0	0	0
3€	0	0	0,5	1

   Bildet man nun die Grenzmatrix bzw. die Potenzmatrix mit einem großen Exponenten (z.B. 100), so erhält man:

Von Nach	1€	0€	2€	3€
1€	0	0	0	0
0€	0,6667	1	0,3333	0
2€	0	0	0	0
3€	0,3333	0	0,6667	1

   Die erste Spalte gibt die Verlust- (0,6667) und Gewinnwahrscheinlichkeit (0,3333) an.

3. **Die 1. Mittelwertsregel**
   Wahrscheinlichkeit eines inneren Zustandes = gewichtetes Mittel der Wahrscheinlichkeiten seiner Nachbarn

   $p_i = \sum_{k=0}^{n} p_{ik} \cdot p_k$ für innere Zustände, p_{ik} Wahrscheinlichkeit vom Zustand i in den Nachbarzustand k zu gelangen
   $p_i = 1$ für absorbierende Randzustände; $p_i = 0$ für die restlichen Randzustände

   Dem Übergangsgraphen entnimmt man:
   $$p_1 = 0{,}5 \cdot p_0 + 0{,}5 \cdot p_2 = 0{,}5 \cdot 1 + 0{,}5 \cdot p_2$$
   $$p_2 = 0{,}5 \cdot p_3 + 0{,}5 \cdot p_1 = 0{,}5 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot p_1 = 0{,}5 p_1$$
   Nach Einsetzen erhält man: $p_1 = 0{,}5 + 0{,}5 \cdot (0{,}5 \cdot p_1) \Leftrightarrow p_1 = p_1 = \frac{2}{3}$

Welches ist die durchschnittliche Spiellänge?

1. **Erwartungswertberechnung**
   Dem Pfaddiagramm entnimmt man folgende Tabelle für die Spiellängendauer:

Dauer	1	2	3	k
Wahrscheinlichkeit	0,5	$0{,}5^2$	$0{,}5^3$	$0{,}5^k$

   Für den Erwartungswert E der Spiellängendauer ergibt sich also:
   $E = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot 0{,}5^k = 0{,}5 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot 0{,}5^{k-1} = 0{,}5 \cdot \frac{1}{(1-0{,}5)^2} = 2$. Dabei wurde die Formel
   $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$ verwendet.

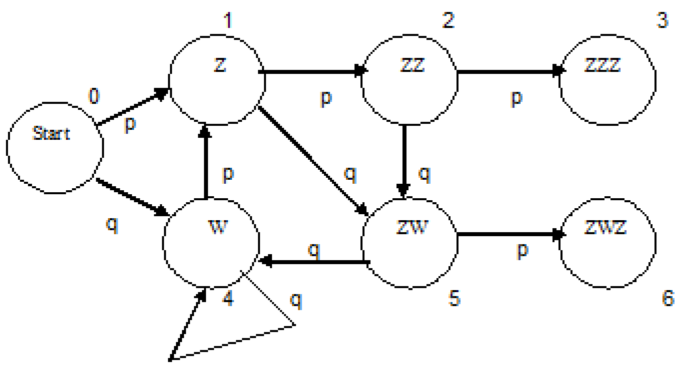
2. **Die 2. Mittelwertsregel**
   Erwartungswert eines inneren Zustandes = 1 + gewichtetes Mittel der Erwartungswerte seiner Nachbarn $m_i = 1 + \sum_{k=0}^{n} p_{ik} \cdot m_k$ für innere Zustände; $m_i = 0$ für Randzustände
   (m_i der Erwartungswert des Zustandes i)

   $m_1 = 1 + 0{,}5 \cdot m_2 + 0{,}5 \cdot m_0 = 1 + 0{,}5 \cdot m_2 + 0{,}5 \cdot 0$
   $m_2 = 1 + 0{,}5 \cdot m_1 + 0{,}5 \cdot m_3 = 1 + 0{,}5 \cdot m_1 + 0{,}5 \cdot 0$
   Nach Einsetzen folgt: $m_1 = 1 + 0{,}5 \cdot (1 + 0{,}5 m_1) \Leftrightarrow m_1 = 2$

Münzwurf

Eine Münze wird so lange geworfen, bis ZZZ oder ZWZ erscheint.
Auf welchen Ausfall sollte man setzen?

Das Spiel stellt man am besten in einem Graphen dar (Zustände von 0 bis 6):



p_i sei die Wahrscheinlichkeit, vom Zustand i in den Zustand 3 zu gelangen.

Anwendung der **1. Mittelwertsregel:**
Es gilt: $p_3 = 1$, $p_6 = 0$
(3 und 6 sind Randzustände; 3 ist der „absorbierende“ Randzustand)
$p_2 = p + q \cdot p_5$
$p_1 = p \cdot p_2 + q \cdot p_5 = p \cdot (p + q \cdot p_5) + q \cdot p_5 = p^2 + p_5 \cdot (p \cdot q + q)$
$p_5 = p \cdot p_6 + q \cdot p_4 = p \cdot 0 + q \cdot p_4 = q \cdot p_4$
$p_4 = q \cdot p_4 + p \cdot p_1 = q \cdot p_4 + p \cdot (p^2 + p_5 \cdot (p \cdot q + q)) = q \cdot p_4 + p \cdot (p^2 + q \cdot p_4 \cdot (p \cdot q + q))$

Aus der letzten Gleichung folgt: $p_4 = \dfrac{p^3}{1 - q - p^2 \cdot q^2 - p \cdot q^2}$

Ersetzt man q durch 1 – p, so folgt: $p_4 = \dfrac{p}{1 + p - p^2}$

$p_0 = p \cdot p_1 + q \cdot p_4 = p \cdot (p^2 + p_5 \cdot (p \cdot q + q)) + q \cdot p_4 = p^3 + p^2 \cdot q^2 \cdot p_4 + p \cdot q^2 \cdot p_4 + q \cdot p_4$
$\quad = p^3 + (p^2 \cdot q^2 + p \cdot q^2 + q) \cdot p_4$

$$p_0 = p^3 + \frac{p^3 \cdot q^2 + p^2 \cdot q^2 + p \cdot q}{1 + p - p^2}$$

Ersetzt man q durch 1 – p, so folgt: $p_0 = p^3 + \dfrac{p - p^3 - p^4 + p^5}{1 + p - p^2}$

Für p = q = 0,5 erhält man p_0 = 0,4. ZZZ erreicht man also mit der Wahrscheinlichkeit 0,4 und folglich ZWZ mit der Wahrscheinlichkeit 0,6 (da es keine weiteren Randzustände gibt).

Ergänzung: Für welches p ist die Wahrscheinlichkeit der beiden Randzustände gleich? Betrachtet man den obigen Graphen, so wird klar, dass $p_0 = p_4$ (was man im Übrigen auch durch algebraische Umformung nachweisen könnte). Es ergibt sich der Ansatz:

$$\frac{p}{1+p-p^2} = 0{,}5 .$$

Diese Gleichung hat die Lösung $p = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618034$ (Zahl vom Goldenen Schnitt).

Berechnung der Wahrscheinlichkeiten mithilfe des Grenzwertes einer **Übergangsmatrix** (p = q = 0,5):

	Start	Z	ZZ	ZZZ	ZW	W	ZWZ
Start	0	0	0	0	0	0	0
Z	0,5	0	0	0	0	0,5	0
ZZ	0	0,5	0	0	0	0	0
ZZZ	0	0	0,5	1	0	0	0
ZW	0	0,5	0,5	0	0	0	0
W	0,5	0	0	0	0,5	0,5	0
ZWZ	0	0	0	0	0,5	0	1

Bildet man eine genügend hohe Potenz dieser Matrix, so erhält man:

	Start	Z	ZZ	ZZZ	ZW	W	ZWZ
Start	0	0	0	0	0	0	0
Z	0	0	0	0	0	0	0
ZZ	0	0	0	0	0	0	0
ZZZ	0,4	0,4	0,6	1	0,2	0,4	0
ZW	0	0	0	0	0	0	0
W	0	0	0	0	0	0	0
ZWZ	0,6	0,6	0,4	0	0,8	0,6	1

Die Wahrscheinlichkeit, um von Start in den Zustand ZZZ zu gelangen, entnimmt man der Spalte „Start“: p_{Start} = 0,4.
Der Grenzmatrix lassen z.B. auch folgende Informationen entnehmen: Die Wahrscheinlichkeit p_{ZZ} , um vom Zustand ZZ in den Zustand ZZZ zu gelangen, beträgt 0,6. Betrachtet man den Übergangsgraphen, so gilt $p_{ZZ} = 0{,}5 + 0{,}5\cdot p_{ZW}$. Da p_{ZW} = 0,2 (lt. Grenzmatrix), folgt: $p_{ZZ} = 0{,}5 + 0{,}5\cdot 0{,}2 = 0{,}6$, was ja auch schon der Grenzmatrix entnommen wurde.

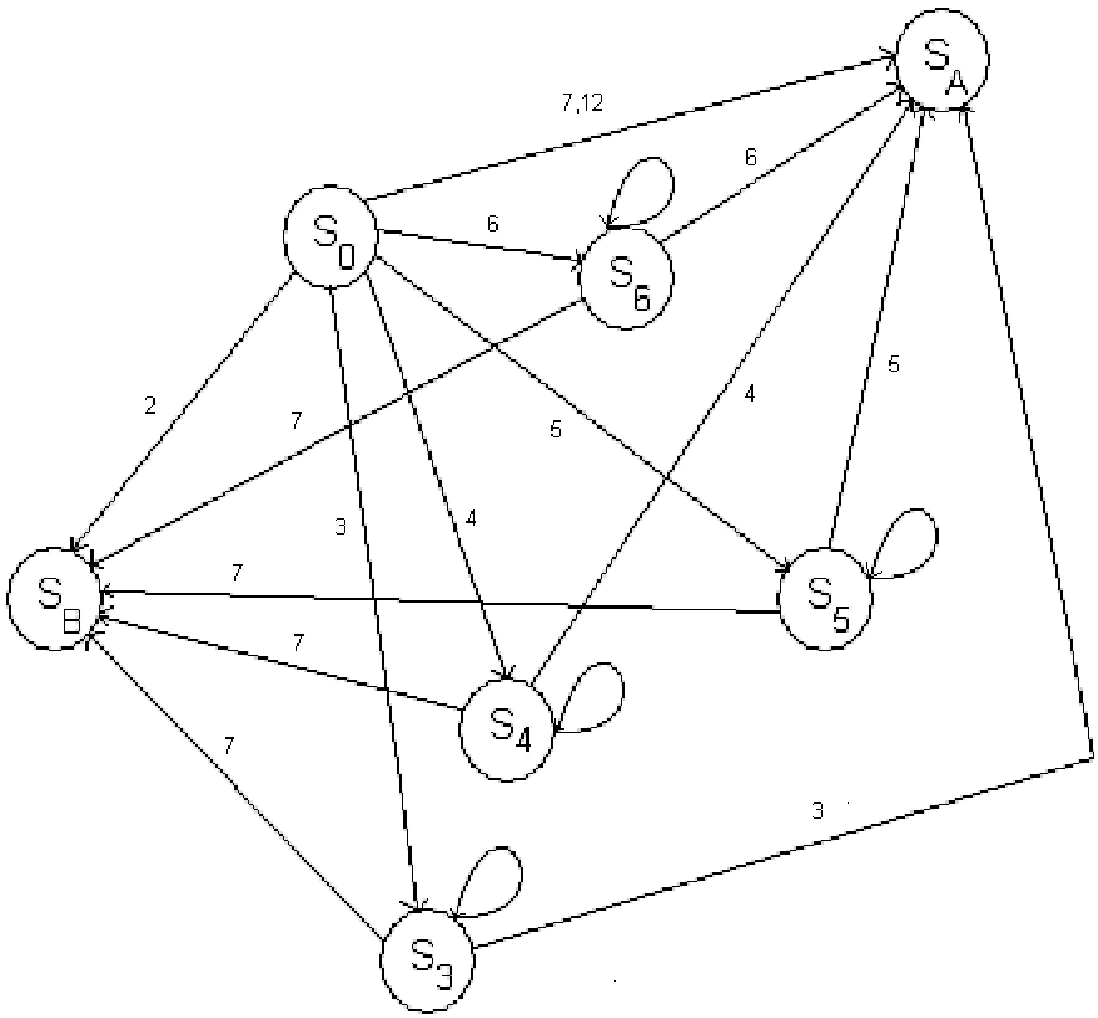
Welches ist die mittlere Anzahl von Würfen bis zum Spielende?
Es wird die **2. Mittelwertsregel** benutzt:
$m_3 = 0$, $m_6 = 0$
$m_2 = 1 + p_{2;3}\cdot m_3 + p_{2;5}\cdot m_5 = 1 + p\cdot 0 + q\cdot m_5 = 1 + q\cdot m_5$
$m_1 = 1 + p_{1;2}\cdot m_2 + p_{1;5}\cdot m_5 = 1 + p\cdot(1 + q\cdot m_5) + q\cdot m_5 = 1 + p + m_5\cdot(p\cdot q + q)$
$m_5 = 1 + p_{5;6}\cdot m_6 + p_{5;4}\cdot m_4 = 1 + p\cdot 0 + q\cdot m_4 = 1 + q\cdot m_4$
$m_4 = 1 + p_{4;4}\cdot m_4 + p_{4;1}\cdot m_1 = 1 + q\cdot m_4 + p\cdot m_1 = 1 + q\cdot m_4 + p\cdot(1 + p + m_5\cdot(p\cdot q + q))$
$\quad = 1 + q\cdot m_4 + p\cdot(1 + p + (1 + q\cdot m_4)\cdot(p\cdot q + q))$
Aus der letzten Gleichung folgt:

$$m_4 = \frac{1+2p+p^2-p^3}{p^2+p^3-p^4}$$

Für p = 0,5 gilt $m_4 = 6{,}8$. Da $m_0 = m_4$ (s.o.) benötigt man im Mittel 6,8 Würfe, um ZZZ oder ZWZ zu erreichen.

Das Würfelspiel JIM

Von zwei Würfeln wird die Augensumme bestimmt. Spieler A gewinnt (im ersten Wurf), wenn die Augensumme 7 oder 12 beträgt. Spieler B gewinnt (im ersten Wurf), wenn die Augensumme 2 beträgt. Bei allen anderen Augensummen wird weiter gewürfelt, bis die Augensumme 7 erscheint (dann gewinnt B) oder die erste Augensumme wiederholt wird (dann gewinnt A). Handelt es sich um ein faires Spiel?



Der vorstehende Graph zeigt die möglichen Übergänge: Erscheint z.B. im ersten Wurf die Augensumme 3, so geht das Spiel in den Zustand S_3 über. Wird danach die Augensumme 7 geworfen, so hat Spieler B gewonnen (Zustand S_B), wird die Augensumme 3 wiederholt, so hat Spieler A gewonnen (Zustand S_A). Bei allen anderen Augensummen verbleibt das Spiel im Zustand S_3. Die Zustände für die Augensummen 8, 9, 10 und 11 sind aus Übersichtlichkeitsgründen nicht eingezeichnet.

Augensummenwahrscheinlichkeiten										
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Anwendung der **1. Mittelwertsregel**
Sei p_3 die Wahrscheinlichkeit, um vom Zustand S_3 in den Zustand S_A zu gelangen. Dann gilt: $p_3 = \frac{2}{36} + \frac{28}{36} \cdot p_3$ (Mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{36}$ wird die Augensumme 3 geworfen und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{28}{36}$ verbleibt man im Zustand S_3. Es folgt $p_3 = \frac{2}{8}$.
Analog folgt:

p_3	p_4	p_5	p_6	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}
$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{8}$

Für die Wahrscheinlichkeit p_A, um vom Zustand S_0 in den Zustand S_A zu gelangen, gilt dann:

$$\begin{aligned} p_A &= \frac{7}{36} + \frac{2}{36} \cdot (p_3 + p_{11}) + \frac{3}{36} \cdot (p_4 + p_{10}) + \frac{4}{36} \cdot (p_5 + p_9) + \frac{5}{36} \cdot (p_6 + p_8) \\ &= \frac{7}{36} + \frac{2}{36} \cdot \frac{4}{8} + \frac{3}{36} \cdot \frac{6}{9} + \frac{4}{36} \cdot \frac{8}{10} + \frac{5}{36} \cdot \frac{10}{11} \\ &= \frac{244}{495} = 0{,}49 \end{aligned}$$

Das Spiel ist also fast fair.

Die Wahrscheinlichkeit kann auch mit Hilfe der **Pfadregeln** bestimmt werden:

$$p_A = \frac{7}{36} + 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{36} \cdot \left(\frac{28}{36} \right)^k \cdot \frac{2}{36} \right) + 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{36} \cdot \left(\frac{27}{36} \right)^k \cdot \frac{3}{36} \right) + 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{36} \cdot \left(\frac{26}{36} \right)^k \cdot \frac{4}{36} \right) + 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5}{36} \cdot \left(\frac{25}{36} \right)^k \cdot \frac{5}{36} \right)$$

Erläuterung:

$\frac{7}{36}$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass A im ersten Wurf eine 7 oder eine 12 würfelt.

$\frac{2}{36} \cdot \left(\frac{28}{36} \right)^k \cdot \frac{2}{36}$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass A im ersten Wurf eine 3, danach k-mal keine 3 und keine 7 und danach eine 3 würfelt. Die 2 vor dem Summenzeichen erklärt sich durch die Tatsache, dass dieselbe Wahrscheinlichkeit für die Augensumme 11 gilt. Die weiteren Terme stehen für die Augensummen 4 bzw. 10, 5 bzw. 9 und 6 bzw. 6 im ersten Wurf.
Unter Anwendung der Summenformel für die geometrische Reihe folgt:

$$p_A = \frac{7}{36} + 2 \cdot \left(\frac{2}{36} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{28}{36}} + 2 \cdot \left(\frac{3}{36} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{27}{36}} + 2 \cdot \left(\frac{4}{36} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{26}{36}} + 2 \cdot \left(\frac{5}{36} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{25}{36}}$$

$$p_A = \frac{7}{36} + 2 \cdot \left(\frac{2}{36} \right)^2 \cdot \frac{36}{8} + 2 \cdot \left(\frac{3}{36} \right)^2 \cdot \frac{36}{9} + 2 \cdot \left(\frac{4}{36} \right)^2 \cdot \frac{36}{10} + 2 \cdot \left(\frac{5}{36} \right)^2 \cdot \frac{36}{11} = \frac{244}{495}$$

Berechnung der Wahrscheinlichkeiten mithilfe des Grenzwertes einer **Übergangsmatrix**:
(p = q = 0,5):

	Start	3 - 11	4 - 10	5 - 9	6 - 8	A	B
Start	0	0	0	0	0	0	0

3 - 11	$\frac{4}{36}$	$\frac{28}{36}$	0	0	0	0	
4 - 10	$\frac{6}{36}$	0	$\frac{27}{36}$	0	0	0	0
5 - 9	$\frac{8}{36}$ 1)	0	0	$\frac{26}{36}$ 2)	0	0	0
6 - 8	$\frac{10}{36}$	0	0	0	$\frac{25}{36}$	0	0
A	$\frac{7}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$ 3)	$\frac{5}{36}$	1	0
B	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$ 4)	$\frac{6}{36}$	0	1

Die Spalten für die Augensummen 3 und 11, 4 und 10, 5 und 9 sowie 6 und 8 sind zusammengefasst.
Erläuterung einiger Zahlen:

1): Vom Start gelangt man in den Zustand „5 – 9“ mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{8}{36}$ (siehe Augensummentabelle).
3): Hat der Spieler A die Augensumme 5 (oder 9) geworfen, so gewinnt er, wenn er die Augensumme wiederholt. Dies gelingt mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{36}$.
4): Hat der Spieler A die Augensumme 5 (oder 9) geworfen, so verliert er, wenn er die Augensumme 7 würfelt. Dies passiert mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{6}{36}$.
2):): Hat der Spieler A die Augensumme 5 (oder 9) geworfen, so muss er weiterwürfeln, wenn weder 3) noch 4) eintreten. Dies passiert mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{26}{36}$.
Als Potenzmatrix (n = 100) erhält man:

	Start	3 - 11	4 - 10	5 - 9	6 - 8	A	B
Start	0	0	0	0	0	0	0
3 - 11	0	0	0	0	0	0	
4 - 10	0	0	0	0	0	0	0
5 - 9	0	0	0	0	0	0	0
6 - 8	0	0	0	0	0	0	0
A	0,493	0,25	0,333	0,4	0,455	1	0
B	0,507	0,75	0,667	0,6	0,545	0	1

Problemerweiterung: Welches ist die durchschnittliche Spieldauer?
Sei m_3 die mittlere Anzahl der Würfe vom Zustand S_3 bis zum Spielende. Dann gilt nach der **2. Mittelwertsregel:**

$$m_3 = 1 + \frac{28}{36} \cdot m_3 \Leftrightarrow m_3 = 4{,}5$$

Analog folgt:

m_3	m_4	m_5	m_6	m_8	m_9	m_{10}	m_{11}
4,5	4	3,6	$3\frac{3}{11}$	$3\frac{3}{11}$	3,6	4	4,5

$$m_0 = 1 + \frac{2}{36}\cdot(4{,}5+4{,}5)) + \frac{3}{36}\cdot(4+4) + \frac{4}{36}\cdot(3{,}6+3{,}6) + \frac{5}{36}\cdot\left(3\frac{3}{11}+3\frac{3}{11}\right) = 3\frac{289}{330}$$

Alternative Berechnung mit Hilfe des **Erwartungswertes:**
Tritt im ersten Wurf die Augensumme 2, 7 oder 12 auf, so ist das Spiel beendet. Die Wahrscheinlichkeit hierfür beträgt $\frac{8}{36}$.
Die Wahrscheinlichkeit, dass das Spiel nach k-Würfen beendet ist, beträgt:

$$2\cdot\frac{2}{36}\cdot\left(\frac{28}{36}\right)^{k-2}\cdot\frac{8}{36} + 2\cdot\frac{3}{36}\cdot\left(\frac{27}{36}\right)^{k-2}\cdot\frac{9}{36} + 2\cdot\frac{4}{36}\cdot\left(\frac{26}{36}\right)^{k-2}\cdot\frac{10}{36} + 2\cdot\frac{5}{36}\cdot\left(\frac{25}{36}\right)^{k-2}\cdot\frac{11}{36}$$

Erläuterung für $\frac{2}{36}\cdot\left(\frac{28}{36}\right)^{k-2}\cdot\frac{8}{36}$: Der 1. Faktor gibt die Wahrscheinlichkeit für eine 3 im ersten Wurf an. Der zweite Faktor gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass k-2 Würfe weder eine 3 noch eine 7 geworfen werden. Der dritte Faktor gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass im letzten Wurf eine 3 oder eine 7 geworfen werden.
Für eine 11 im ersten Wurf gilt dieselbe Wahrscheinlichkeit. Die anderen Terme stehen für die Augensummen 4 bzw. 10, 5 bzw. 9 und 6 bzw. 8.
Sei X die Anzahl der Würfe bis zum Spielende. Dann folgt:

$$E(X) = 1\cdot\frac{8}{36} + \frac{32}{36^2}\cdot\sum_{k=2}^{\infty}\left(k\cdot\left(\frac{28}{36}\right)^{k-2}\right) + \frac{54}{36^2}\cdot\sum_{k=2}^{\infty}\left(k\cdot\left(\frac{27}{36}\right)^{k-2}\right) + \frac{80}{36^2}\cdot\sum_{k=2}^{\infty}\left(k\cdot\left(\frac{26}{36}\right)^{k-2}\right) + \frac{110}{36^2}\cdot\sum_{k=2}^{\infty}\left(k\cdot\left(\frac{25}{36}\right)^{k-2}\right)$$

Um die Summen auszurechnen, wird die Formel $\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$ benutzt.

Dann gilt: $\sum_{k=2}^{\infty} k\cdot q^{k-2} = \sum_{k=1}^{\infty}(k+1)\cdot q^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot q^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} + \frac{1}{1-q} = \frac{2-q}{(1-q)^2}$

Es folgt:

$$E(X) = \frac{8}{36} + \frac{32}{36^2}\cdot\frac{2-\frac{28}{36}}{\left(\frac{8}{36}\right)^2} + \frac{54}{36^2}\cdot\frac{2-\frac{27}{36}}{\left(\frac{9}{36}\right)^2} + \frac{80}{36^2}\cdot\frac{2-\frac{26}{36}}{\left(\frac{10}{36}\right)^2} + \frac{110}{36^2}\cdot\frac{2-\frac{25}{36}}{\left(\frac{11}{36}\right)^2}$$

$$E(X) = \frac{8}{36} + \frac{32}{8^2}\cdot\frac{44}{36} + \frac{54}{9^2}\cdot\frac{45}{36} + \frac{80}{10^2}\cdot\frac{46}{36} + \frac{110}{11^2}\cdot\frac{47}{36} = 3\frac{289}{330}$$

Warteschlangenproblem

(nach einer Hausarbeit von A. Bölsche)
Ein Skilift kann alle 15 s eine Person befördern. Innerhalb dieses Zeitraums kommen höchstens zwei Personen am Lift an. Die Zugänge erfolgen zufällig und unabhängig voneinander.

Anzahl der in einem Zeitintervall eintreffenden Personen	0	1	2
Wahrscheinlichkeit	0,4	0,4	0,2

Als maximale Schlangenlänge werden 5 Personen zugelassen. Beachte: Wenn keiner wartet, steigt die ankommende Person sofort in den Lift.

a) Bestimme die Verteilung der am Lift wartenden Personen (jeweils nach Abgang einer Person) nach 15 s, 30 s, 45 s, 60 s, 2 min und 5 min, wenn zu Beginn gerade eine Person wartet.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach 1min, 2 min und 5 min genau drei Personen warten, wenn zu Beginn 5 Personen warten?

c) Dieser Prozess geht langfristig in eine stationäre Verteilung über. Gib diese an.

d) Bei schlechtem Wetter gilt:

Anzahl der in einem Zeitintervall eintreffenden Personen	0	1	2
Wahrscheinlichkeit	0,5	0,4	0,1

Wie sieht nun die Verteilung der am Lift wartenden Personen nach 1 min, 2 min, 5 min aus, wenn zu Beginn gerade eine Person wartet?

e) Kann der Betreiber den Lift bei schlechtem Wetter alle 30 s fahren lassen, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass 5 Personen warten, langfristig nicht größer als 0,5 sein soll? Beachte, dass das Zeitintervall auf 30 s gestiegen ist, und somit in diesem Zeitraum mehr als 2 Personen ankommen können. Bestimme zur Beantwortung der Frage die stationäre Verteilung.

Lösung mit Hilfe einer **Übergangsmatrix**:

a) Der Prozess hat 6 Zustände Z_i, wobei Z_i bedeutet, dass i-1 Personen warten ($1 \leq i \leq 6$).
Übergangsmatrix (von einem Zeitintervall zum nächsten):

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

p_{ij} ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach einem Zeitintervall der Zustand Z_i in den Zustand Z_j übergegangen ist. (p_{11} = 0,8 - keine oder eine Person trifft ein, die eintreffende Person wird befördert).

Anfangsverteilung: $\vec{v_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die i-te Komponente gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass der Prozess am Anfang den Zustand Z_i hat.

Nach 15 s: $\vec{v}_1 = P \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}4 \\ 0{,}2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, nach 30 s: $\vec{v}_2 = P^2 \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}48 \\ 0{,}32 \\ 0{,}16 \\ 0{,}04 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

nach 5 min: $\vec{v}_{20} = P^{20} \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}5145 \\ 0{,}2555 \\ 0{,}1255 \\ 0{,}0609 \\ 0{,}0293 \\ 0{,}0142 \end{pmatrix}$

(z.B. beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass nach 5 min 2 Personen warten: 0,1255).

b)

$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Gesucht ist jeweils die 4. Komponente von $\vec{v}_4, \vec{v}_8, \vec{v}_{20}$. Dies sind: 0,2496; 0,2267; 0,1088.

c) Gesucht ist: $\vec{v}$ mit $P \cdot \vec{v} = \vec{v}$. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0{,}5079 \\ 0{,}2540 \\ 0{,}1270 \\ 0{,}0635 \\ 0{,}0317 \\ 0{,}0159 \end{pmatrix}$

d) Analog zu Teil a)

e)

Anzahl der in einem Zeitintervall (30 s) eintreffenden Personen	0	1	2	3	4
Wahrscheinlichkeit	0,5·0,5 = 0,25	2·0,4·0,5 = 0,4	2·0,5·0,1+0,4·0,4 = 0,26	2·0,4·0,1 =0,08	0,1·0,1 = 0,01

Übergangsmatrix: $\begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}26 & 0{,}4 & 0{,}25 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}08 & 0{,}26 & 0{,}4 & 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0{,}01 & 0{,}08 & 0{,}26 & 0{,}4 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0{,}01 & 0{,}08 & 0{,}26 & 0{,}4 & 0{,}25 \\ 0 & 0 & 0{,}01 & 0{,}09 & 0{,}35 & 0{,}75 \end{pmatrix}$

Stationäre Verteilung; $\vec{v}$ = (0,0402; 0,0563; 0,0934; 0,1526; 0,2495; 0,408). Da die gesuchte Wahrscheinlichkeit 0,408 ist, kann der Betreiber den Lift bei schlechtem Wetter alle 30 s fahren lassen.

Zusammenfassung

Zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten kamen folgende Methoden zum Einsatz:

1. Pfadregeln für unendlich lange Baumdiagramme
2. 1. Mittelwertsregel
3. Grenzmatrixverfahren

Zur Berechnung von Erwartungswerten/Spiellängen kamen zum Einsatz

1. Definition des Erwartungswertes
2. 2. Mittelwertsregel