Das Teilungsproblem

Jürgen Zumdick

Eine Glücksspielpartie mit zwei Spielern erfordert n Gewinnspiele. Die Wahrscheinlichkeit, ein einzelnes Spiel zu gewinnen, sei für jeden Spieler $\frac{1}{2}$. Die Spielpartie wird vorzeitig abgebrochen. Wie ist der Gewinn g (g = 2e, e Einsatz der Spieler) aufzuteilen?

1. **Einsatzmöglichkeiten**
   a) Die Aufgabe kann in verschiedenen Jahrgangsstufen gestellt werden. Je nach bekannten mathematischen Modellen ergeben sich unterschiedliche Lösungen. Die Frage, ob die Aufteilung jeweils gerecht ist, kann nur dann beantwortet werden, wenn zuvor definiert wird, was unter gerecht verstanden werden soll.
   b) Historische Quellen werden vorgestellt und analysiert.
   c) Das Problem dient zur Einführung von gerichteten Graphen mit endlich vielen Zuständen (kann als Einführung von Markow-Ketten dienen).
2. **Entwicklung von Strategien am Beispiel dreier Gewinnspiele**
   a) Da maximal 5 Spiele durchgeführt werden, bringt bei einem vorzeitigen Abbruch jedes Gewinnspiel $\frac{1}{5}$ des Gewinns. Der Rest wird halbiert.

Spielstand	Anteil für den Führenden	Aufteilungsverhältnis
1 : 0	$\frac{1}{5}g + \frac{4}{5}g : 2 = \frac{3}{5}g$	3 : 2
2 : 0	$\frac{2}{5}g + \frac{3}{5}g : 2 = \frac{7}{10}g$	7 : 3
2 : 1	$\frac{2}{5}g + \frac{2}{5}g : 2 = \frac{3}{5}g$	3 : 2
x : y	$\frac{x}{5}g + \frac{5-x-y}{5}g : 2 = \frac{x-y+5}{10}g$	(x-y+5) : (5-x+y)

Verallgemeinerung für n Gewinnspiele		
x : y	$\frac{x-y+2n-1}{2(2n-1)}g$	$(x-y+2n-1):(2n-1-x+y)$

   b) (Pacioli)

   Der Führende erhält $\frac{Anzahl\ der\ gewonnenen\ Spiele}{Anzahl\ der\ gespielten\ Spiele}g$

Spielstand	Anteil für den Führenden	Aufteilungsverhältnis
1 : 0	g	
2 : 0	g	
2 : 1	$\frac{2}{3}g$	2 : 1

Verallgemeinerung für n Gewinnspiele		
x : y	g, falls y = 0 $\frac{x}{x+y}g$, falls y ≠ 0	x : y

c) (Cardano)

Es seien a die Anzahl der Spiele, die dem Führenden bis zu einem Sieg fehlen, und b die Anzahl der Spiele, die seinem Gegner bis zu einem Sieg fehlen. Der Führende erhält dann $\frac{\sum_{i=1}^{b} i}{\sum_{i=1}^{b} i + \sum_{i=1}^{a} i} g$

Spielstand	Anteil für den Führenden	Aufteilungsverhältnis
1 : 0	$\frac{1+2+3}{(1+2+3)+(1+2)} g = \frac{6}{9} g$	6 : 3
2 : 0	$\frac{1+2+3}{(1+2+3)+1} g = \frac{6}{7} g$	6 : 1
2 : 1	$\frac{1+2}{(1+2)+1} g = \frac{3}{4} g$	3 : 1
x : y	$\frac{\frac{(3-y)\cdot(4-y)}{2}}{\frac{(3-y)(4-y)}{2} + \frac{(3-x)(4-x)}{2}} g = \frac{(3-y)(4-y)}{(3-y)(4-y)+(3-x)(4-x)} g$	((3-y)(4-y)) : ((3-x)(4-x))

Verallgemeinerung für n Gewinnspiele		
x : y	$\frac{(n-y)(n+1-y)}{(n-y)(n+1-y)+(n-x)(n+1-x)} g$	((n – y)(n + 1 – y)): ((n – x)(n + 1 – x))

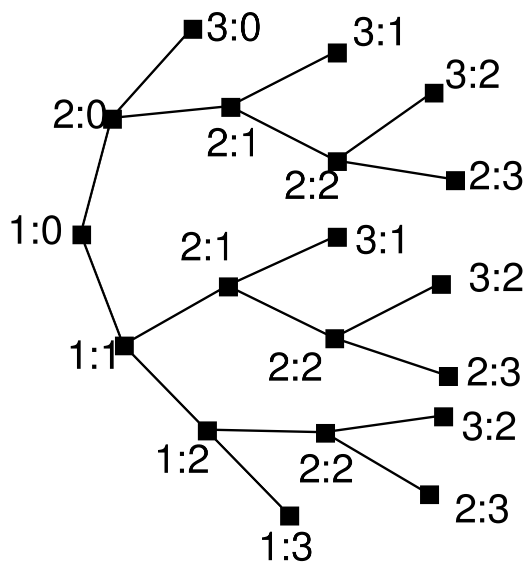
d) (Tartaglia)

Der Führende erhält $\frac{|\text{Differenz des Spielstandes}|}{\text{Anzahl der Gewinnspiele}} e + e$

Spielstand	Anteil für den Führenden	Aufteilungsverhältnis
1 : 0	$\frac{1}{3} e + e = \frac{4}{3} e = \frac{2}{3} g$	2 : 1
2 : 0	$\frac{2}{3} e + e = \frac{5}{3} e = \frac{5}{6} g$	5 : 1
2 : 1	$\frac{1}{3} e + e = \frac{4}{3} e = \frac{2}{3} g$	2 : 1
x : y	$\frac{x-y}{3} e + e = \frac{x-y+3}{3} e = \frac{x-y+3}{6} g$	(x – y + 3) : (y – x + 3)

Verallgemeinerung für n Gewinnspiele		
x : y	$\frac{x-y+n}{2n} g$	(x – y + n) : (y – x + n)

e) (Pascal)



Spielstand	Wahrscheinlichkeit für den Führenden, die Partie zu gewinnen	Aufteilungsverhältnis
1 : 0	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{11}{16}$	11 : 5
2 : 0	$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{8}$	7 : 1
2 : 1	$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$	3 : 1
x : y	$a = \sum_{i=0}^{2-y} \binom{2-x+i}{i} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-x+i}$	$\frac{a}{1-a}$

Herleitung von a:
Alle Teilpfade, die zum Spielstand x : y führen, haben die Wahrscheinlichkeit $p^x \cdot q^y$. Für den Sieg werden Pfade mit der Wahrscheinlichkeit $p^3 \cdot q^i$ benötigt mit $0 \le i \le 2$. Also müssen sich an den Teilpfad, der zum Spielstand x : y führt, Teilpfade mit der Wahrscheinlichkeit
$p^{3-x} \cdot q^i$ ($0 \le i \le 2-y$) anschließen. Bleibt noch zu klären, wie viele dieser Teilpfade es jeweils gibt. Alle diese Teilpfade enden mit einem letzten Abschnitt, der die Wahrscheinlichkeit p hat. Daher werden noch 3 – x – 1 = 2 – x Abschnitte benötigt, die jeweils die Wahrscheinlichkeit p haben. Weitere i Abschnitte ($0 \le i \le 2-y$) haben die Wahrscheinlichkeit q. Also bestehen die gesuchten Teilpfade aus 2 – x + i Abschnitten, von denen i Abschnitte die Wahrscheinlichkeit q haben (und einem letzten Abschnitt mit der Wahrscheinlichkeit p). Es folgt $a = \sum_{i=0}^{2-y} \binom{2-x+i}{i} \cdot p^{3-x} \cdot q^i$. Für

$p = \frac{1}{2} = q$ ergibt sich obige Beziehung.

Für n Gewinnspiele folgt:

$$a = \sum_{i=0}^{n-1-y} \binom{n-1-x+i}{i} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-x+i} .$$

f) (Fermat)

Ansatz: Die 5 Spiele werden auf jeden Fall durchgeführt.

1. Fall:

Es stehe 1 : 0 für Spieler A. Die nachfolgenden 4 Spiele können wie folgt ausgehen (a: Spieler A gewinnt; b: Spieler B gewinnt):

Spielkombination	aaaa	aaab aaba abaa baaa	aabb abab baab abba baba bbaa	abbb babb bbab bbba	bbbb
Anzahl der Spielkombinationen	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$

1 + 4 + 6 Spielkombinationen führen zu einem Gesamtsieg von Spieler A, 4 + 1 Kombinationen zu einem Gesamtsieg von Spieler B.

Es wird wie bei Fermat die Gewinnwahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ vorausgesetzt, da alle Kombinationen gleichwertig sind.

2. Fall

Es stehe 2 : 0 für Spieler A

Dann gibt es $\binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}=1+3+3$ Spielkombinationen, die zu einem Gesamtsieg von A führen, und eine Kombination, die zu einem Gesamtsieg von B führt.

3. Fall

Es stehe 2 : 1 für Spieler A

Dann führen $\binom{2}{0}+\binom{2}{1}=1+2$ Kombinationen zu einem Gesamtsieg von A und eine Kombination zu einem Gesamtsieg von B.

Zusammenstellung im Pascalschen Dreieck:

Spielstand	Kombinationen, die zu einem Gesamtsieg für A bzw. B führen	Aufteilungsverhältnis v
2 : 1 2 : 0 1 : 0	$\boxed{1\quad 2}\quad 1$ $\boxed{1\quad 3\quad 3}\quad 1$ $\boxed{1\quad 4\quad 6}\quad 4\quad 1$	3 : 1 7 : 1 11 : 5
x : y		$\sum_{i=0}^{2-y}\binom{5-(x+y)}{i} : \sum_{i=3-y}^{5-(x+y)}\binom{5-(x+y)}{i}$

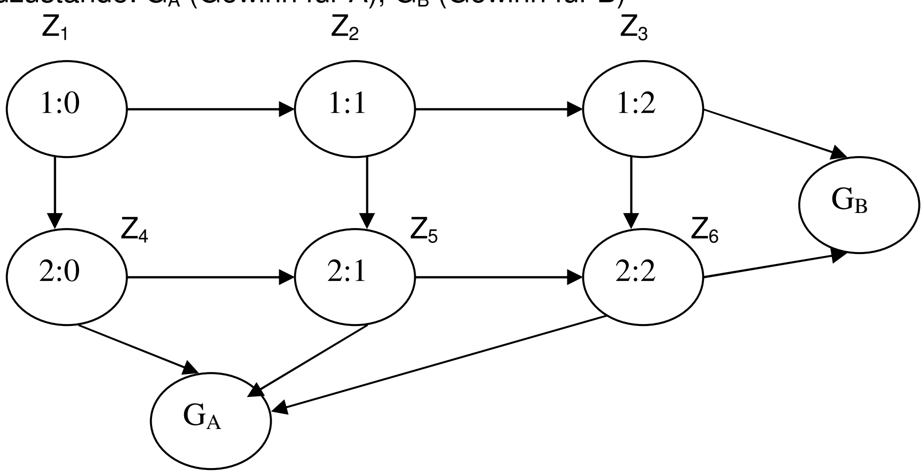
(Die Zeilennummer des Pascalschen Dreiecks gibt an, wie viel Spiele noch bis zur Gesamtzahl von 5 Spielen durchzuführen sind. Für einen Gesamtsieg von A darf B noch maximal 2-y Spiele gewinnen.)

Verallgemeinerung für das Aufteilungsverhältnis v:

$$v = \sum_{i=0}^{n-1-y} \binom{2n-1-(x+y)}{i} : \sum_{i=n-y}^{2n-1-(x+y)} \binom{2n-1-(x+y)}{i}$$

Die Lösungen von Fermat und Pascal sind äquivalent

g) Der Spielablauf wird im folgenden gerichteten Graphen (Markoff-Kette) dargestellt:
Startzustand: 1:0 für A
Endzustände: G_A (Gewinn für A), G_B (Gewinn für B)



p ($=\frac{1}{2}$) sei die Wahrscheinlichkeit für A,ein Spiel zu gewinnen, q diejenige für B.

g_i sei die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler A vom Zustand Zi aus die Partie gewinnt.

$g_6 = p \cdot 1 + q \cdot 0 = \frac{1}{2}$

$g_5 = p \cdot 1 + q \cdot g_6 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

$g_4 = p \cdot 1 + q \cdot g_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{8}$

$g_3 = p \cdot g_6 + q \cdot 0 = \frac{1}{4}$

$g_2 = p \cdot g_5 + q \cdot g_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$g_1 = p \cdot g_4 + q \cdot g_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{16}$

Es ergeben sich dieselben Aufteilungsverhältnisse wie bei Fermat und Pascal.

Die Untersuchung der Zustände 0:0, 0:1, 0:2 erübrigt sich aus Symmetriegründen im Falle $p = \frac{1}{2}$.

h) Lösung mithilfe stochastischer Matrizen:
Die Markoff-Kette lässt sich durch folgende Wahrscheinlichkeitstabelle darstellen:

nach	Z_1 (1:0)	Z_2 (1:1)	Z_3 (1:2)	Z_4 (2:0)	Z_5 (2:1)	Z_6 (2:2)	G_A	G_B	von
	0	q	0	p	0	0	0	0	Z_1

									(1:0)
	0	0	q	0	p	0	0	0	Z_2 (1:1)
	0	0	0	0	0	p	0	q	Z_3 (1:2)
	0	0	0	0	q	0	P	0	Z_4 (2:0)
	0	0	0	0	0	q	P	0	Z_5 (2:1)
	0	0	0	0	0	0	p	q	Z_6 (2:2)
	0	0	0	0	0	0	1	0	G_A
	0	0	0	0	0	0	0	0	G_B

In Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 0 & q & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \\ g_6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \\ g_6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \\ g_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ p \\ p \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \\ g_6 \end{pmatrix}$$

bzw. $U \cdot \vec{g} + \vec{a} = \vec{g} \Leftrightarrow \vec{g} = (E-U)^{-1} \cdot \vec{a}$

$(E-U)^{-1}$ heißt Fundamentalmatrix der absorbierenden Markoffkette.
Mithilfe eines CAS lässt sich diese Matrix schnell bilden.

Es gilt aber auch nach einem Satz aus der Matrizentheorie:
$(E-U)^{-1} = E + U + U^2 + U^3 + .. + U^k$ (Ist U eine nxn-Matrix, so ist U^k die Nullmatrix für $k \geq n$.

$$U^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,25 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, U^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,375 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Im vorliegenden Fall ist bereits U^4 die Nullmatrix.

Es folgt:

$$\vec{g} = (E-U)^{-1} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}375 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0{,}25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{16} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{7}{8} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3. Lösungen von Fermat und Pascal für vier bzw. n Gewinnspiele

a) (Pascal)

Es wird obige Formel $a = \sum_{i=0}^{n-1-y} \binom{n-1-x+i}{i} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-x+i}$ benutzt:

Spielstand	Wahrscheinlichkeit für den Führenden, die Partie zu gewinnen	Aufteilungsverhältnis
3 : 2	$\sum_{i=0}^{1} \binom{i}{i} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1+i} = \frac{3}{4}$	3 : 1
3 : 1	$\sum_{i=0}^{2} \binom{i}{i} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1+i} = \frac{7}{8}$	7 : 1
3 : 0	$\sum_{i=0}^{3} \binom{i}{i} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1+i} = \frac{15}{16}$	15 : 1
2 : 1	$\sum_{i=0}^{2} \binom{1+i}{i} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2+i} = \frac{11}{16}$	11 : 5
2 : 0	$\sum_{i=0}^{3} \binom{1+i}{i} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2+i} = \frac{26}{32}$	26 : 6
1 : 0	$\sum_{i=0}^{3} \binom{2+i}{i} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3+i} = \frac{42}{64}$	42 : 22

b) (Fermat)

Beim Stande von 1 :0 ergibt sich ein Gesamtsieg von A, wenn er von den noch ausstehenden 6 Spielen höchstens 3 verliert. Dies geht auf

$\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} = 1 + 6 + 15 + 20$ Arten.

Die weiteren Fälle sind der folgenden Tabelle zu entnehmen.

Spielstand x : y	Kombinationen, die zu einem Gesamtsieg für A bzw. B führen	Aufteilungsverhältnis
3 : 2 3 : 1	$\boxed{1\quad 2}\quad 1$ $\boxed{1\quad 3\quad 3}\quad 1$	3 : 1 7 : 1

3 : 0 2 : 1 2 : 0 1 : 0	$\boxed{1 \quad 4 \quad 6 \quad 4} \quad 1$ $\boxed{1 \quad 4 \quad 6} \quad 4 \quad 1$ $\boxed{1 \quad 5 \quad 10 \quad 10} \quad 5 \quad 1$ $\boxed{1 \quad 6 \quad 15 \quad 20} \quad 15 \quad 6 \quad 1$	15 : 1 11 : 5 26 : 6 42 : 22

Bzgl. der letzten Spalte vgl. die Formel:

$$v = \sum_{i=0}^{n-1-y} \binom{2n-1-(x+y)}{i} : \sum_{i=n-y}^{2n-1-(x+y)} \binom{2n-1-(x+y)}{i}$$

(Für das ungekürzte Aufteilungsverhältnis $\frac{c}{d}$ gilt: $c + d = 2^{2n-(1+x+y)}$)