

Abitur LK Mathematik

1. Aufgabe

Person	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
Einkommen	30100	31400	33000	35500	37500	40500	45500	52500	64500	129000

In obiger Tabelle findest du die Einkommen (z.B. Jahreseinkommen) von 10 Personen.

- a) Wie hoch ist der Anteil des Einkommens der drei (fünf) ärmsten Personen am Gesamteinkommen aller Personen?
- b) Beantworte vorstehende Frage auch für die 30% reichsten Personen.
- c) Die wissenschaftliche Forschung beschäftigt sich mit der Aufgabe, eine Funktion f zu entwickeln, mit der Fragen wie in a) und b) beantwortet werden können. Es ist also gesucht: $x \rightarrow f(x)$, mit $x \in [0;1]$ und $f(x) \in [0;1]$ (x gibt den Anteil der ärmsten Personen an der Gesamtpersonenzahl an; $f(x)$ ist deren Anteil am Gesamteinkommen). Bei Aufgabe a) ist also $x = 0,3$ bzw. $0,5$ und $f(x)$ der jeweils von dir errechnete Wert.
- 1) Begründe, dass $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$.
 - 2) Folgender Modellansatz findet sich in der neueren Literatur:
Der Anstieg des Einkommensanteils der ärmsten Personen ist proportional zum durchschnittlichen Einkommen der verbleibenden reichen Personen.
Begründe, dass sich hieraus die Gleichung $f'(x) = a \cdot \frac{1-f(x)}{1-x}$ ergibt (Bedeutung von x s.o.).
 - 3) Zeige, dass $f(x) = 1 - d \cdot (1-x)^a$ die vorstehende Gleichung erfüllt.
- d) Bestimme alle Lösungen $f(x)$ der Differentialgleichung $f'(x) = a \cdot \frac{1-f(x)}{1-x}$. Begründe hierzu zunächst, dass $\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln(g(x)) + c$. Forme dann die Differentialgleichung so um, dass du vorstehende Integrationsregel anwenden kannst. Zeige, dass nur $f(x) = 1 - (1-x)^a$ das vorstehende Einkommensproblem löst.
- e) Zeige durch Rechnung, dass $f(x) = 1 - (1-x)^a$ streng monoton steigend ist. Welche weitere Voraussetzung steckt also in dem Einkommensmodell?
- f) Berechne aus deinen Antworten zu a) die Konstante a in der Funktionsgleichung $f(x) = 1 - (1-x)^a$. Falls du a) nicht lösen konntest, wähle $a = 0,59$ (entspricht dem Faktor für Deutschland). Überprüfe, ob dieser Wert eine gute Näherung ist, indem du dein Ergebnis aus b) damit vergleichst.

g) Folgende Werte sind mit Hilfe empirischer Untersuchungen ermittelt worden:

Land	a
Österreich	0,65
USA	0,47
Brasilien	0,27

Berechne für jedes dieser drei Länder $f(0,3)$. Über welchen Anteil verfügen in diesen Ländern die jeweils 10% reichsten Personen? Was bedeutet es für die Einkommensverteilung in einem Land, wenn a nahe bei 0 (nahe bei 1) liegt?

2. Aufgabe

Bei einem Landeanflug muss ein Flugzeug den sog. Gleitwinkel (Winkel zwischen Erdoberfläche und Flugkurs) und die sog. Einflugrichtung (Winkel zwischen Nordrichtung und der senkrechten Projektion des Flugkurses auf die Erdoberfläche – im Uhrzeigersinn gemessen) einhalten. Für den Flughafen Berlin Schönefeld gilt ein Gleitwinkel von 3° und eine Einflugrichtung von 68° .

- Bestimme die Ebene, die senkrecht auf der Erdoberfläche steht und in welcher der Landekurs eines anfliegenden Flugzeuges liegt, sowie den Landekurs selbst (als Geradengleichung). Wähle dazu die Erdoberfläche als x-y-Ebene, die y-Achse in Nordrichtung und den Flughafen im Koordinatensprung.
- Ein Flugzeug fliegt in 1000m Höhe parallel zur Erdoberfläche. An welchem Punkt muss es auf den Landekurs einbiegen? Welche Entfernung hat das Flugzeug von diesem Punkt bis zum Flughafen noch zurückzulegen?

Falls a) nicht gelöst wurde, verwende als Landekurs: $\vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 248 \\ 100 \\ 14 \end{pmatrix}$.

- Eine Freilandleitung kann durch folgende Geradengleichung dargestellt werden:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 50 \\ 1200 \\ 20 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wird der Sicherheitsabstand des anfliegenden Flugzeuges von 500m zur Freilandleitung eingehalten?

3. Aufgabe

In Deutschland sind etwa 0,1% (= Prävalenz) der 15-65-jährigen mit dem HIV-Virus infiziert. Der Test Elisa hat eine Sensitivität (positive Testreaktion bei Vorliegen einer Infektion) von 100% und eine Spezifität (negative Testreaktion bei nicht infizierten Personen) von 99,3%. Der Test Western-Blot hat eine Sensitivität von 95% und eine Spezifität von 100%.

- Zunächst wird der Test Elisa durchgeführt. Zeige, dass bei einem positiven Test die Wahrscheinlichkeit, tatsächlich infiziert zu sein, ca. 12,5 % beträgt.
- Die Testpositiven werden nun mit dem Western-Blot-Test getestet. Wie hoch ist nun bei einem positiven Test die Wahrscheinlichkeit, tatsächlich infiziert zu sein, und bei einem negativen Test die Wahrscheinlichkeit, nicht infiziert zu sein?

- c) Weshalb wird die Testreihenfolge nicht umgekehrt festgelegt?
- d) Flächendeckende Untersuchungen sind u.a. wegen hoher Testkosten nicht angebracht. Man könnte sich daher auf Risikogruppen beschränken, die dann natürlich eine höhere Prävalenz aufweisen. Wie groß muss die Prävalenz mindestens sein, damit bei einem Test mit einer Sensitivität von 99,8% und einer Spezifität von 99,7% die Wahrscheinlichkeit, bei einem positiven Testergebnis auch tatsächlich infiziert zu sein, größer als 90% ist?