Obwohl die Gewinnerwartung gegen ∞ strebt, konvergiert das eingesetzte Kapital gegen 0.

Jürgen Zumdick

1. Das Spiel

Ein Spieler verfügt über ein Anfangskapital K_0. Er wirft eine L-Münze n-mal. Erscheint Kopf (K), so wird sein aktuelles Kapital halbiert, ansonsten mit $\frac{5}{3}$ multipliziert.

Es sei $K_0 = 1$ und

$$X_i = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ falls im i}-\text{ten Wurf K erscheint} \\ \frac{5}{3} \text{ falls im i}-\text{ten Wurf Z erscheint} \end{cases}$$

Dann gilt für das Kapital K_n nach n Spielen: $K_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$

Da die X_i unabhängige Zufallsvariablen sind, gilt für den Erwartungswert von K_n:

$$E(K_n) = E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{2}\right) = \prod_{i=1}^{n}\frac{13}{12} = \left(\frac{13}{12}\right)^n$$

Der Erwartungswert des Kapitals strebt also gegen ∞.

Simulationen des Spiels zeigen jedoch, dass das Kapital sehr schnell gegen 0 strebt. Wie ist dieses Paradoxon zu erklären?

2. Heuristische Überlegungen

Der Erwartungswert des Kapitals kann auch wie folgt berechnet werden:

4-malige Durchführung

Ausfall	Kapital K_4	Wahrscheinlichkeit
0-mal Kopf	$\left(\frac{5}{3}\right)^3$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$
1-mal Kopf	$\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^2$	$\binom{3}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3$
2-mal Kopf	$\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{3}\right)$	$\binom{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3$
3-mal Kopf	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$

$$E(K_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{3}\right)\cdot\binom{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^2\cdot\binom{3}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{5}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

Verallgemeinert:

$$E(K_n) = \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^i\left(\frac{5}{3}\right)^{n-i}\cdot\binom{n}{i}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Wird das Spiel z. B. 100-mal durchgeführt, dann liegen mit 90%-Wahrscheinlichkeit die Anzahl der Ausfälle für Kopf im Intervall [42; 58] (Nachweis mit der integralen Näherungsformel). Einen Überblick über die dabei erzielten Kapitalien liefert die nachfolgende Tabelle:

Anzahl Kopf	Kapital
42	$\left(\frac{1}{2}\right)^{58} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{28} = 0{,}7 \cdot 10^{-8}$
50	$\left(\frac{1}{2}\right)^{50} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{50} = 0{,}1 \cdot 10^{-3}$
58	$\left(\frac{1}{2}\right)^{42} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{58} = 1{,}7$

Der hohe Erwartungswert wird durch Ausfälle mit einer hohen Kopfanzahl verursacht – die aber mit geringer Wahrscheinlichkeit auftreten. Zum Beispiel beträgt das Kapital bei 70-mal Kopf $\left(\frac{1}{2}\right)^{30} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{70} = 3{,}15 \cdot 10^{6}$ und der Anteil am Erwartungswert

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{30}\left(\frac{5}{3}\right)^{70} \cdot \binom{100}{70} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{100} = 3{,}15 \cdot 10^{6} \cdot 2{,}3 \cdot 10^{-5} = 72{,}45\,.$$

3. Beweis

Es sei

$$Y_n = \frac{1}{n} \cdot \ln(K_n)$$

Es folgt:

$$E(Y_n) = E\left(\frac{1}{n} \cdot \ln(K_n)\right) = E\left(\frac{1}{n} \cdot \ln\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)\right) = E\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln(X_i)\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} E(\ln(X_i))$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{5}{3}\right)\right) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{5}{3}\right)\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{5}{3}\right)\right) < 0$$

Es gilt folgender Satz:

$p\left(\left|\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} Z_i - E(Z_1)\right| < \varepsilon\right)$ strebt gegen 1, falls alle Z_i unabhängig sind, denselben Erwartungswert $E(Z_1)$ und beschränkte Varianz haben. Da die Bedingungen auf die $\ln(X_i)$ zutreffen, folgt:

$$p\left(\left|\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln(X_i) - E(\ln(X_1))\right| < \varepsilon\right) \Leftrightarrow p\left(-\varepsilon < \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln(X_i) - E(\ln(X_1)) < \varepsilon\right) \Leftrightarrow$$

$$p\left(-\varepsilon < \frac{1}{n} \cdot \ln(K_n) - E(\ln(X_1)) < \varepsilon\right)$$

Für $\varepsilon = -\frac{E(\ln(X_1))}{2} > 0$ folgt

$$p\left(\frac{E(\ln(X_1))}{2} < \frac{1}{n}\cdot\ln(K_n) - E(\ln(X_1)) < -\frac{E(\ln(X_1))}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$p\left(\frac{3\cdot n\cdot E(\ln(X_1))}{2} < \ln(K_n) < \frac{n\cdot E(\ln(X_1))}{2}\right)$$

Also gilt:

$p\left(K_n < e^{\frac{n\cdot E(\ln(X_1))}{2}}\right)$ strebt gegen 1. Da der Exponent negativ ist, folgt:

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Kapital gegen 0 strebt, geht gegen 1.