Paradoxa in der Stochastik

Jürgen Zumdick

Paradoxon von Bertrand

In einem Kreis werde zufällig eine Sehne gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Sehne länger ist als die Seite eines dem Kreis einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks (ABC)?

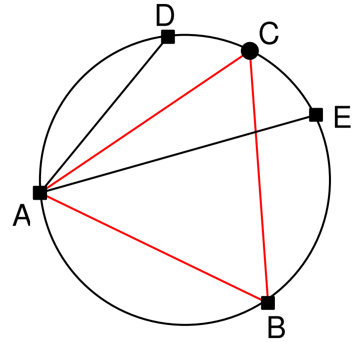
1. Lösung

Um die Sehne zu zeichnen, wird ein beliebiger Kreispunkt A als Anfangspunkt ausgewählt. A sei ein Eckpunkt des Dreiecks. Die Sehne ist dann länger, wenn der Endpunkt der Sehne auf dem Bogen BC liegt.

(AD kürzere Sehne, AE längere Sehne)

Also gilt für die zugehörige Wahrscheinlichkeit:

$$p = \frac{\textit{Länge des Bogens BC}}{\textit{Kreisumfang}} = \frac{1}{3}$$



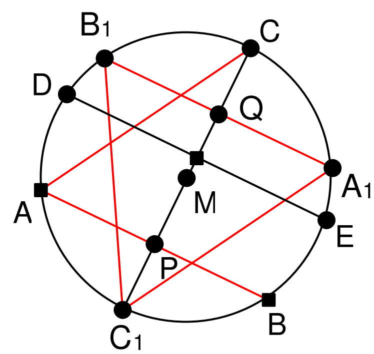
2. Lösung

Zeichne einen Durchmesser, wähle einen Punkt auf dem Durchmesser und zeichne die Sehne senkrecht in diesem Punkt auf dem Durchmesser. Die Sehne ist länger, falls sie im Bereich zwischen P und Q liegt.

(DE längere Sehne)

Also gilt für die zugehörige Wahrscheinlichkeit:

$$p = \frac{\textit{Länge der Strecke PQ}}{\textit{Länge des Durchmessers}} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$$



(Man überlege sich, dass P und Q jeweils den Radius halbieren)

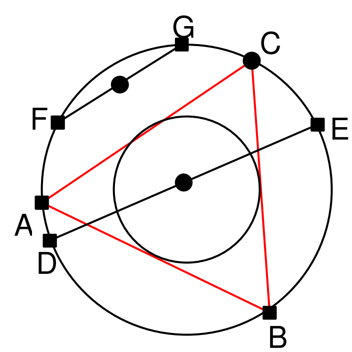
3. Lösung

Wähle den Mittelpunkt der Sehne aus dem Kreisinneren aus. Die Sehne ist länger wenn der Mittelpunkt im Inneren des konzentrischen Kreises mit dem Radius $\frac{r}{2}$ liegt.

(FG kürzere Sehne, DE längere Sehne)

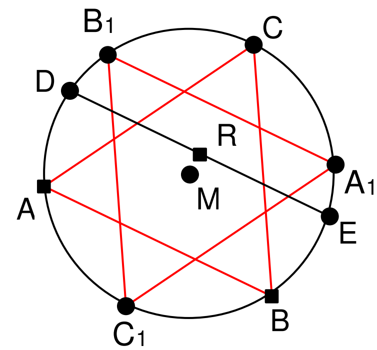
Also gilt für die zugehörige Wahrscheinlichkeit:

$$p = \frac{\textit{Fläche des inneren Kreises}}{\textit{Fläche des äußeren Kreises}} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2}{\pi \cdot r^2} = \frac{1}{4}$$



4. Lösung

Wähle einen Punkt R des Kreisinneren und eine Richtung (RD). Die Sehne ist dann länger, wenn R im Inneren des Streifens ABA_1B_1 liegt.



Also gilt für die zugehörige Wahrscheinlichkeit:

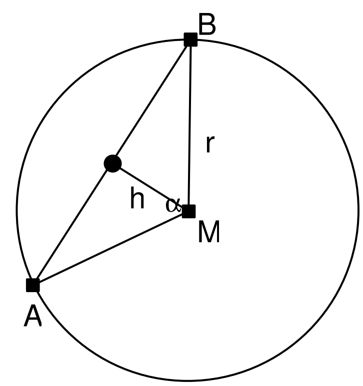
$$p = \frac{\textit{Fläche des Streifens } ABA_1B_1}{\textit{Fläche des äußeren Kreises}} = \frac{\pi \cdot r^2 - 2 \cdot \textit{Segmentfläche } BAC_1}{\pi \cdot r^2}.$$

Für den Inhalt A der Segmentfläche wird die Formel $A = \frac{r^2}{2} \cdot (\alpha - \sin\alpha)$ gewählt. α ist der Mittelpunktswinkel $AMB = \frac{2 \cdot \pi}{3}$.

Es folgt: $p = \frac{\pi \cdot r^2 - 2 \cdot \frac{r^2}{2} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\pi \cdot r^2} = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \pi} = 0{,}609$

Nebenrechnung

Der Inhalt A einer Segmentfläche mit dem Mittelpunktswinkel α berechnet sich als Differenz der Flächeninhalte von Kreisausschnitt und gleichschenkligem Dreieck AMB.



$$A = \frac{\alpha}{2 \cdot \pi} \cdot \pi \cdot r^2 - \frac{AB}{2} \cdot h = \frac{\alpha \cdot r^2}{2} - r \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot r \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha \cdot r^2}{2} - r^2 \cdot \frac{\sin\alpha}{2} = \frac{r^2}{2} \cdot (\alpha - \sin\alpha)$$

Dabei wurde das Additionstheorem $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$ benutzt.

Erklärung

Das Paradoxe ist nun, dass alle 4 Lösungen korrekt sind, da es sich um 4 verschiedene Zufallsversuche handelt und es sich daher jeweils eine andere Wahrscheinlichkeitsfunktion handelt. Im Folgenden seien jeweils die Ergebnisräume Ω_i und die gewählten Ereignisse A_i angegeben:

	Ergebnisraum Ω	Ereignis A	Gleichwahrscheinlichkeit für	Wahrscheinlichkeitsberechnung
1	{ Punkte des Kreises}	{ Punkte eines bestimmten Kreisbogens }	Alle Punkte des Kreises	Quotient von Bogenlängen
2	{ Punkte eines Durchmessers }	{ Punkte des „Mittelstücks“ des Durchmessers }	Alle Punkte des Durchmessers	Quotient von Streckenlängen
3	{ Punkte des Kreisinneren }	{ Punkte des Inneren des Kreises mit dem Radius $\frac{r}{2}$ }	Alle Punkte des Kreisinneren	Quotient von Kreisflächen
4	{ Punkte des Kreisinneren und vorgegebene feste „Richtung“}	{Punkte eines „Kreisstreifens“}	Alle Punkte des Kreisinneren und alle Richtungen	Quotient von Flächen

(Dass es sich jeweils um unterschiedliche Zufallsversuche handelt, wird auch deutlich, wenn man eine stochastische Simulation durch einen Computer durchführt. Es müssten dem Programm die Auswahlkriterien für eine Sehne mitgeteilt werden.)

Komponieren mit Zufallsziffern

Eine Walzerkomposition besteht aus einer Folge von 16 verschiedenen Takten. Für jede Stelle in der Folge stehen jeweils 11 verschiedene Takte zur Verfügung (insgesamt sind es also 176 Takte). Die Auswahl aus den jeweils 11 Takten wird per Zufall ermittelt (Augensumme zweier Würfel).

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich zwei Kompositionen in genau einem Takt (also an genau einer Stelle) unterscheiden?

1. Lösung

Es gibt insgesamt 11^{16} verschiedene Kompositionen. Betrachtet man eine gegebene Komposition, dann gibt es $16 \cdot 10$ Kompositionen, die sich von der gegebenen in genau einem Takt unterscheiden – von den 16 Stellen wählt man eine Stelle aus, an der sich die Kompositionen unterscheiden; an dieser Stelle können 10 andere Takte stehen. Sei X die Anzahl der Stellen, an denen die Takte verschieden sind. Dann gilt:

$$p(X = 1) = \frac{16 \cdot 10}{11^{16}}$$

Verallgemeinerung für t Takte pro Stelle und s Stellen: $p(X = 1) = \dfrac{\binom{s}{1} \cdot (t-1)}{t^s}$

Verallgemeinerung für n Stellen, an denen die Takte verschieden sind:

$$p(X = n) = \frac{\binom{s}{n} \cdot (t-1)^n}{t^s}$$

2. Lösung

Aus der Gesamtzahl der Kompositionen wählt man 2 aus, die auch identisch sein können. Da es bei der Auswahl nicht auf die Reihenfolge ankommt, hat man eine ungeordnete Stichprobe mit Wiederholung. Damit beträgt die Anzahl solcher Paare:

$$\binom{11^{16}+2-1}{2}=\binom{11^{16}+1}{2}.$$

Wie viel Paare gibt es, die sich an genau einer Stelle unterscheiden?

Von den 16 Stellen wird eine Stelle ausgesucht, an denen sich die Takte unterschieden. An den übrigen 15 Stellen müssen beide Kompositionen denselben Takt aufweisen. Dafür gibt es 11^{15} Möglichkeiten (für jede Stelle gibt es ja 11 verschiedene Takte). An der Stelle, an der sich die Paare unterscheiden, müssen sie unterschiedliche Takte aufweisen. Dafür gibt es $\binom{11}{2}$ Möglichkeiten (ungeordnet - ohne Wiederholung -, da die beiden Kompositionen ja auch einer ungeordneten Stichprobe entstammen). Für die unterschiedliche Stelle gibt es nun 16 Möglichkeiten.

Ergebnis: $p(X=1)=\dfrac{11^{15}\cdot 16\cdot\binom{11}{2}}{\binom{11^{16}+1}{2}}$

Verallgemeinerung: $p(X=1)=\dfrac{t^{s-1}\cdot s\cdot\binom{t}{2}}{\binom{t^{s}+1}{2}}$

Verallgemeinerung: $p(X=n)=\dfrac{t^{s-n}\cdot\binom{s}{n}\cdot\binom{t}{2}^{n}}{\binom{t^{s}+1}{2}}$

Beide Lösungen sind korrekt, da sie unterschiedliche Zufallsversuche betreffen.

Der erste Versuch müsste wie folgt präzisiert werden:
Gegeben ist eine Komposition. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich eine zufällig ausgewählte Komposition von der gegebenen an genau einer Stelle unterscheidet.

Der zweite Versuch:
Man wähle zufällig zwei Kompositionen aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie sich an genau einer Stelle unterscheiden?