Ableitung der Exponentialfunktionen – Differentialgleichungen – Wachstumsmodelle

Jürgen Zumdick

I. Ableitung der Exponentialfunktionen (f(x) = a^x)

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} a^x \frac{a^h - 1}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - a^0}{h} = a^x f'(0)$$

Das Zeichnen verschiedener Graphen von Exponentialfunktionen legt die Vermutung nahe, dass es eine Exponentialfunktion ($f(x)=b^x$) gibt, die in 0 die Steigung 1 hat. Der Anschauung entnimmt man, dass in einer „kleinen“ Umgebung von 0 Graph und Tangente sich nur unwesentlich unterscheiden:

$b^x \approx 1+x$ nahe bei 0

$$b^{\frac{1}{n}} \approx 1 + \frac{1}{n} \quad \textit{für große } n$$

Unter der Annahme, dass Ungleichungen auch potenziert werden können, erhält man:

$$b \approx \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \textit{für große } n \quad \textit{oder} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = b$$

Dieser Grenzwert wird auch mit e bezeichnet und heißt Eulersche Zahl e. Eine Auswertung mit dem Taschenrechner liefert e ≈ 2,71828.
Ergebnis. $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

$$f(x) = a^x = e^{\ln(a)\cdot x} \Rightarrow f'(x) = \ln(a)\cdot e^{\ln(a)\cdot x} = \ln(a)\cdot a^x$$

II. Eindeutigkeit und Existenz von e

a) Beweis zur Eindeutigkeit und Existenz von e: Kuypers, Lauter, Mathematik Sekundarstufe II, Analysis Leistungskurse, Schwann 1987, S.164 ff

b) Benutzt wird folgender Satz: $f(x_0) = g(x_0)$ und $f'(x) < g'(x)$ für $x > x_0 \Rightarrow f(x) < g(x)$ für $x > x_0$

1. Es seien $h(x) = 0$, $f(x) = e^x - 1$, $g(x) = e^a \cdot x$. Es gilt $h(0) = f(0) = g(0) = 0$ und $h'(x) = 0$, $f'(x) = e^x$, $g'(x) = e^a$.
   Für $0 \le x \le a$ gilt $0 \le e^x \le e^a$. Wegen des obigen Satzes folgt: $0 \le e^x - 1 \le e^a \cdot x$ für $0 \le x \le a$.
2. Es seien $h(x) = 0$, $f(x) = e^x - 1 - x$, $g(x) = e^a \frac{x^2}{2}$. Man zeigt, dass die Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind (Anwendung von 1.), also gilt: $0 \le e^x - 1 - x \le e^a \frac{x^2}{2}$ für $0 \le x \le a$.
3. Es seien $h(x) = 0$, $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$, $g(x) = e^a \frac{x^3}{3!}$. Man zeigt wiederum, dass die Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind (Anwendung von 2.), also gilt: $0 \le e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \le e^a \frac{x^3}{3!}$
4. Vermutung: $0 \le e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n!}) \le e^a \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ (Beweis durch vollständige Induktion)

5. Setze x =1 und es folgt: $(1+1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n!}) \le e \le \dfrac{(1+1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n!})}{1-\frac{1}{(n+1)!}}$

n = 6 liefert: 2,7180556 ≤ e ≤ 2,718595

Alternative: Reihenentwicklung von e^x mit Hilfe von Taylorpolynomen

III. Diffentialgleichungen

a) $f'(x) = k\cdot f(x) \Leftrightarrow f(x) = c\cdot e^{kx}$ $(k \neq 0)$

1. Beweis

$\Leftarrow$ (trivial)

$\Rightarrow$ bzw. $\Leftrightarrow$:

$$f(x)=c\cdot e^{kx} \Leftrightarrow f(x)\cdot e^{-kx}=c \overset{*)}{\Leftrightarrow} \left(f(x)\cdot e^{-kx}\right)'=0 \Leftrightarrow f'(x)\cdot e^{-kx}-f(x)\cdot k\cdot e^{-kx}=0$$
$$\Leftrightarrow f'(x)-f(x)\cdot k=0 \Leftrightarrow f'(x)=k\cdot f(x)$$

Beweis zu *): $g'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = c$

$\Leftarrow$: $g'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{c-c}{h}=\lim\limits_{h\to 0}0=0$

$\Rightarrow$: Annahme: $g(x)\neq c$. Dann existieren x_1 und x_2 $(x_1<x_2)$ mit $g(x_1) \neq g(x_2)$.

Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $x_0\in (x_1,x_2)$ mit $g'(x_0)=\dfrac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}\neq 0$ #

oder:

$g'(x) \le 0 \Rightarrow$ g monoton fallend, $g'(x) \ge 0 \Rightarrow$ g monoton steigend

$g'(x) = 0 \Rightarrow$ g monoton fallend und monoton steigend $\Rightarrow$ g konstant

2. Beweis

$\Rightarrow$: Sei $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^{kx}}$ Die Quotientenregel liefert g'(x) = 0. Als folgt: $\dfrac{f(x)}{e^{kx}}=c \Leftrightarrow f(x)=ce^{kx}$

3. Beweis

$\Rightarrow$ bzw. $\Leftrightarrow$:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=k \Leftrightarrow \int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int kdx+r \Leftrightarrow \ln\left(f(x)\right)+d=k\cdot x+l \Leftrightarrow \ln\left(f(x)\right)=k\cdot x+s$$
$$\Leftrightarrow f(x)=e^{k\cdot x+s} \Leftrightarrow f(x)=c\cdot e^{kx}$$

b) $f'(x) = g(x) \cdot f(x)$

Lösung: $f(x)=ce^{G(x)}$, G Stammfunktion zu g

Beweis durch Differenzieren

c) $f'(x) = u(x)\cdot f(x)+v(x)$

Lösung: $f(x)=\left(\displaystyle\int_a^x\frac{v(t)}{e^{U(t)}}dt+c\right)e^{U(x)}$, U Stammfunktion zu u

Beweis durch Differenzieren:

$$f'(x)=\frac{v(x)}{e^{U(x)}}\cdot e^{U(x)}+\left(\int_a^x \frac{v(t)}{e^{U(t)}}dt+c\right)\cdot e^{U(x)}\cdot u(x)=v(x)+f(x)\cdot u(x)$$

Spezialfall: Beschränktes Wachstum

z sei die Obergrenze einer wachsenden Population. Die Zunahme sei proportional zu z – f(x):

$$f'(x)=k(z-f(x))=k\cdot z-k\cdot f(x)$$

u(x) = -k, v(x) = k·z

$$f(x)=\left(\int_a^x \frac{k\cdot z}{e^{-kt+d}}dt+c\right)e^{-kx+d}=\left(\frac{z}{e^{-k\cdot x+d}}-\frac{z}{e^{-k\cdot a+d}}+c\right)\cdot e^{-k\cdot x+d}=z-z\cdot e^{-kx+ka}+c\cdot e^{-kx+d}$$

$$=z-(z\cdot e^{ka}-c\cdot e^{d})\cdot e^{-kx}=z-m\cdot e^{-kx}$$

Nebenrechnung: $\int\frac{k\cdot z}{e^{-k\cdot t+d}}dt=\int\frac{-z}{e^{b}}db=\frac{z}{e^{b}}=\frac{z}{e^{-k\cdot t+d}}$

Alternativer Beweis:

$$\frac{f'(x)}{z-f(x)}=k$$

Integration auf beiden Seiten liefert:

$$-\ln\left(z-f(x)\right)=k\cdot x+c\Leftrightarrow z-f(x)=m\cdot e^{-kx}$$

d) f‘‘(x) = f‘(x)

Lösung: f(x) = c·e^x + d

Beweis durch Differenzieren

e) f‘‘(x) = -k·f(x)

Lösung: $f(x)=c\cdot\sin(\sqrt{k}\cdot x)+d\cdot\cos(\sqrt{k}\cdot x)$

Beweis durch Differenzieren

(siehe Räuber-Beute-System)

f) f‘(x) = k·(z - f(x))·f(x)

Lösung: $f(x)=\dfrac{ze^{at}n}{z-n+e^{at}n}$, n = f(0), a = k·z

Herleitung siehe: Logistisches Wachstum

g) v’(t) = g - k·v²(t)

(Fallschirmsprung: MU 3/2001, S. 30 bzw. unten stehende Aufgabe)

IV. Modelle und Aufgaben

a) Exponentielles Wachstum

In einer Population seien Geburtenrate g und Sterberate s konstant, d.h. der Wachstumsfaktor ist f = 1 + g – s. Die Gleichung für das diskrete Modell lautet also: $a_{n+1}=f\cdot a_n$, bzw. $a_{n+1}=f^{n+1}\cdot a_0$, a_0 Anfangspopulation.

Tabelliert man den Zuwachs $a_{n+1}-a_n$, so fällt die Proportionalität zum jeweiligen alten Bestand auf:

$\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_n}=\dfrac{f\cdot a_n-a_n}{a_n}=f-1$ oder auch $\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{f\cdot a_n-a_n}{f\cdot a_n}=\dfrac{f-1}{f}$

Geht man nun zum stetigen Modell über, so ergibt sich daher die Bedingung für die Population b(t): Der Zuwachs b‘(t) ist proportional zum Bestand b(t). Also gilt b‘(t) = k·b(t). Es folgt:

$b(t)=c\cdot e^{k\cdot t}$ $(=c\cdot f^{t})$ Die Bedingungen b(0) = a_0 und b(1) = f ·a_0 liefern c = a_0 und k = ln(f).

b) Abkühlung

Auf dem Weihnachtsmarkt wird ein Becher Glühwein ausgeschenkt. Er hat eine Temperatur von 80°, die Umgebungstemperatur beträgt 5°. Nach 10 Minuten beträgt die Temperatur des Glühweins noch 50°. Aus Erfahrung weiß man, dass die Geschwindigke it, mit der die Temperaturdifferenz d(t) abnimmt, proportional zur jeweiligen Temperaturdifferenz ist (Newtonsches Abkühlungsgesetz). Welche Temperatur hat der Glühwein nach 20 Minuten? Wann hat der Glühwein eine Temperatur von 20°?

Nach Modellannahme gilt: $d'(t) = k\cdot d(t)$. Lt. I a) folgt: $d(t) = c\cdot e^{k\cdot t}$.

Die Randbedingungen liefern: d(0) = 80 – 5 = 75 und d(10) = 50 – 5 = 45. Es folgt:

75 = d(0) = c und 45 = d(10) = $c\cdot e^{k\cdot 10}$. Daraus ergibt sich $k = \ln\left(\frac{45}{75}\right)\cdot\frac{1}{10}$

(Man beachte, dass der Abkühlungsfaktor pro Minute $\sqrt[10]{\frac{45}{75}}$ beträgt).

$$d(t) = 75\cdot e^{\ln\left(\frac{45}{75}\right)\cdot\frac{t}{10}} = 75\cdot e^{-0{,}0511\cdot t}$$

d(20) = 27, also beträgt die Temperatur des Glühweines nach 20 Minuten: 5°+ 27°= 32°.

Der Glühwein hat eine Temperatur von 20°, wenn die Differenz zur Umgebungstemperatur 15° beträgt. Gesucht ist also t_0 mit $d(t_0) = 15 \Rightarrow t_0 = 31$.

Erweiterung:

Es werden 0,1 l Glühwein ausgeschenkt. Zur Verfeinerung kann man noch 0,02 l Amaretto hineingießen. Der Amaretto hat Umgebungstemperatur. Der Kunde möchte den verfeinerten Glühwein etwas abkühlen lassen und nach 10 Minuten trinken. Er überlegt, ob der Glühwein stärker abgekühlt wird, wenn der Amaretto erst nach 10 Minuten hinzugegeben wird.

Um die Temperatur einer Mischung zu bestimmen, kann man nach folgendem Modell vorgehen: Eine Flüssigkeit der Masse m_1 hat eine Temperatur t_1 und eine Flüssigkeit der Masse m_2 eine Temperatur t_2. Die vermischten Flüssigkeiten haben dann eine Temperatur von $\frac{t_1\cdot m_1 + t_2\cdot m_2}{m_1 + m_2}$

Lösung

1) Qualitative Überlegung:
   d(t) ist wegen d'(t) < 0 streng monoton fallend, d.h. die Temperaturdifferenz nimmt zu einem früheren Zeitpunkt stärker ab als zu einem späteren. Anders ausgedrückt bedeutet dies, dass ein heißeres Getränk in einem bestimmten Zeitraum stärker abkühlt als ein kälteres – bei ansonsten gleichen Bedingungen. Also sollte der Amaretto erst nach 10 Minuten hinzugefügt werden.
2) Quantitative Berechnung:
   Nach 10 Minuten hat der Glühwein eine Temperatur von 50°. Schüttet man jetzt den Amaretto hinzu, so ergibt sich eine Temperatur der Mischung von $\frac{0{,}1\cdot 50 + 0{,}02\cdot 5}{0{,}12} = 42{,}5°$.

   Schüttet man sofort den Amaretto in den Glühwein, so hat die Mischung eine Temperatur von $\frac{0{,}1\cdot 80 + 0{,}02\cdot 5}{0{,}12} = 67{,}5°$.

   Geht man davon aus, dass die Abkühlung dieser Mischung genau so verläuft wie die Abkühlung des reinen Glühweins – was stark vereinfachend ist, da das Volumen sich geändert hat – , so berechnet sich die Temperatur dieser Mischung nach 10 Minuten wie folgt:

   a) Man lässt 80° heißen Glühwein zunächst auf 67,5° abkühlen und berechnet dann die Temperatur, welche dieser Glühwein nach weiteren 10 Minuten hat.
      80° heißer Glühwein hat eine Temperatur von 67,5°, wenn die Differenz zur Umgebungstemperatur 62,5° beträgt. Dies ist nach $t = \frac{\ln\left(\frac{62{,}5}{75}\right)}{-0{,}0511} = 3{,}57$ Minuten der Fall. Nach 13,57

Minuten ergibt sich eine Differenz zur Umgebungstemperatur von $d(13{,}57) = 37{,}5$. Die Temperatur der Mischung beträgt dann 42,5°.

b) Wegen der obigen Annahme bleibt der Faktor k unverändert. Die Anfangsdifferenz der Temperaturen beträgt 62,5°. Es folgt:
$d(10) = 62{,}5 \cdot e^{-0{,}0511 \cdot 10} = 37{,}5$. Also beträgt die Temperatur der Mischung dann 42,5°.

3) Das Ergebnis aus 2) widerspricht den Überlegungen aus 1). Welcher gedankliche Fehler liegt bei 1) vor?
Sicherlich kühlt ein heißeres Getränk in einem bestimmten Zeitraum stärker ab als ein kälteres, jedoch wird dieser Effekt durch das Mischen wieder aufgehoben. Zwar kühlt der 80° heiße Glühwein um 30° ab, das anschließende Mischen bringt je doch nur eine Temperaturverringerung um 7,5°. Mischt man jedoch sofort, so erbringt dies zu nächst eine Abkühlung um 12,5°. Diese kältere Mischung kühlt nun zwar weniger ab als der 80° heiß e Glühwein - nämlich nur um 25° - in der Summe bleiben aber diese Effekte gleich.

c) Radioaktiver Zerfall

T	0	15	30	45	60
N(t) [10^{12}]	1000	826	683	560	466
$\frac{n(t+h)-n(t)}{h}$ (h = 15)		-11,6	-9,53	-8,2	-6,27
$\frac{\frac{n(t+h)-n(t)}{h}}{n(t)}$		-0,014	-0,0136	-0,0146	-0,0135

$\frac{n(t+h)-n(t)}{h} \approx -0{,}014 n(t)$. Sind die Sekantensteigungen proportional zu n(t), so auch die Tangentensteigungen: $n'(t) = -0{,}014 \cdot n(t) \Rightarrow n(t) = ce^{-0{,}014t}$; wegen n(0) = 1000 folgt:
$n(t) = 1000 \cdot e^{-0{,}014 \cdot t}$
Nachprüfen zeigt, dass wegen des zu großen Zeitintervalls der Proportionalitätsfaktor ungenau ist.

d) C^{14}-Methode

Der radioaktive Kohlenstoff C^{14} zerfällt mit einer Halbwertzeit von ca. 5730 Jahren in den stabilen Kohlenstoff C^{12}. Man weiß aus Erfahrung, dass die Anzahl der in einem bestimmten Zeitraum zerfallenden Atome proportional ist zur Anzahl der vorhandenen Atome. In der Atmosphäre ist das Verhältnis von C^{14} und C^{12} in etwa konstant, da C^{14} durch Weltraumstrahlung ständig neu entsteht. Dies gilt auch für lebende Organismen, die C^{14} ständig aufnehmen. Stirbt ein Organismus, so wird kein C^{14} mehr aufgenommen, während das vorhandene weiterhin zerfällt. Dadurch verändert sich in einem Fossil das Verhältnis beider Kohlenstoffarten, so dass dieses zur Altersbestimmung herangezogen werden kann.
Ein Fossil enthalte noch 70% des Kohlenstoffs C^{14}. Wie alt ist der Fund?

$c(t) = 100 \cdot e^{k \cdot t}$; $50 = 100 \cdot e^{k \cdot 5730}$; es folgt $k = \frac{\ln(0{,}5)}{5730}$

$c(t) = 100 \cdot e^{\ln(0{,}5) \cdot \frac{t}{5730}}$; c(t) = 70 $\Leftrightarrow$ t = 2949

e) Räuber-Beute-System

b(t): Beutebestand; r(t): Räuberbestand

1) $b'(t) = -k \cdot r(t)$ (Die Abnahme des Beutebestandes ist proportional zum Räuberbestand)
2) $r'(t) = l \cdot b(t)$ (Die Zunahme des Räuberbestandes ist proportional zum Beutebestand)

Aus 1) folgt: $r(t) = -\frac{1}{k} \cdot b'(t) \text{ und } r'(t) = -\frac{1}{k} \cdot b''(t)$

In 2) eingesetzt: $-\frac{1}{k} \cdot b''(t) = l \cdot b(t) \Leftrightarrow b''(t) = -k \cdot l \cdot b(t)$

Nach I e) ergibt sich: $b(t) = c \cdot \sin(\sqrt{k \cdot l} \cdot t) + d \cdot \cos(\sqrt{k \cdot l} \cdot t)$

$$r(t) = -\frac{1}{k} \cdot b'(t) = -c \cdot \sqrt{\frac{l}{k}} \cdot \cos(\sqrt{k \cdot l} \cdot t) + d \cdot \sqrt{\frac{l}{k}} \cdot \sin(\sqrt{k \cdot l} \cdot t)$$

Zeichnet man die Graphen von b und r (Vorgabe der statistischen Konstanten k und l sowie der Anfangspopulationen b(0) = d und r(0) = $-c\sqrt{\frac{l}{k}}$), so erkennt man die Unzulänglichkeit des Modells (die Arten sterben aus).

Bessere Modelle in Nöbauer, Timischl, Mathematische Modelle in der Biologie, Vieweg 1979, S. 110 ff (Lotka-Volterrasche Gleichungen) und MU 3/71 ,S. 38 ff (periodische Populationsschwankungen, ohne dass eine der Arten ausstirbt). Vgl. auch MU 1/77, S. 64 ff.

Lotka-Volterrasche Gleichungen:
$$b'(t) = d \cdot b(t) - e \cdot b(t) \cdot r(t)$$
$$r'(t) = -f \cdot r(t) + g \cdot b(t) \cdot r(t)$$

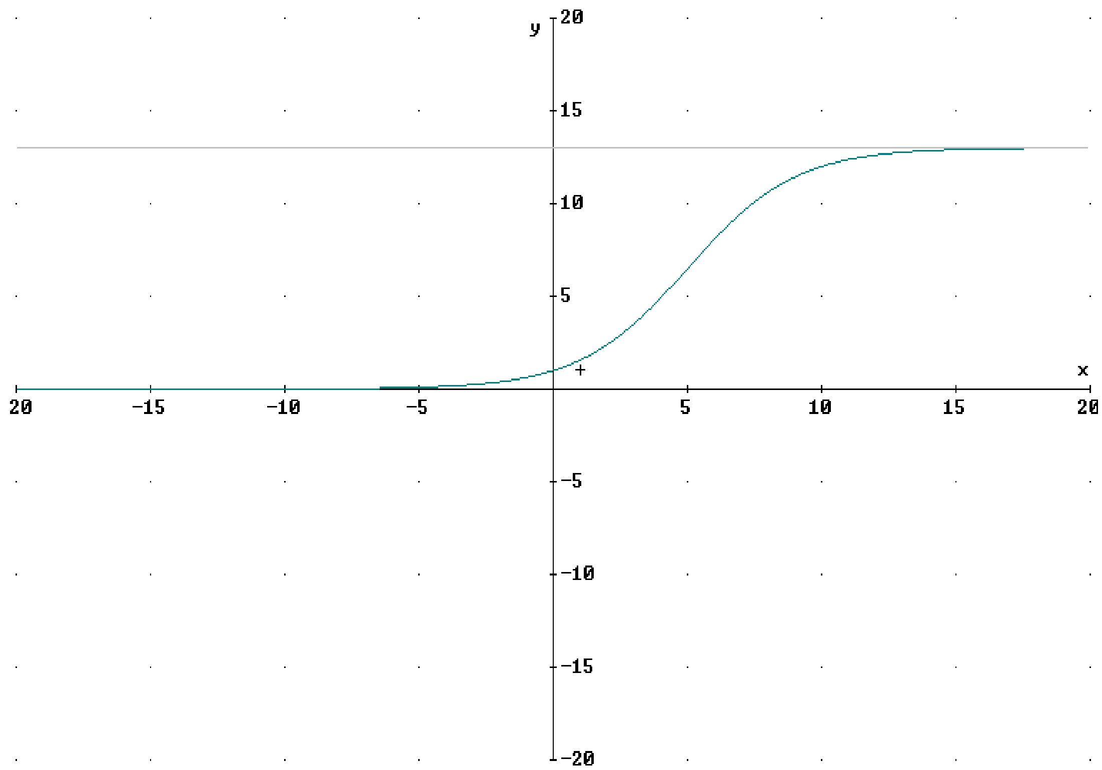
d: Zuwachsrate der Beutepopulation ohne Räuber
e: Abnahme der Beutepopulation durch die Räuber
f: Abnahme der Räuberpopulation ohne Beute
g: Zuwachsrate der Räuberpopulation durch die Beute

(zum zugehörigen diskreten Modell siehe: Paper Populationen und MU 1/77, S. 59 ff)

f) Logistisches Wachstum

1. Beispiel

Das Wachstum der Weltbevölkerung verläuft (ab dem Jahre??) zunächst exponentiell. Die Annahme eines weiteren exponentiellen Wachstums führt zu unrealistischen Ergebnissen. Folgender Verlauf scheint realistisch zu sein (Zeitachse nicht transformiert) :



Im folgenden sei:
t: Zeit; b(t): Weltbevölkerung in Milliarden; z: Sättigungsgrenze (13,3)

1. Phase: exponentielles Wachstum
2. Phase: beschränktes Wachstum
Um einen abrupten Übergang zu vermeiden, ergibt sich als Modellansatz:

$$b'(t) = k \cdot b(t) \cdot (z - b(t)) \Leftrightarrow \frac{b'(t)}{b(t)(z-b(t))} = k$$

Welche Wahl ist für k sinnvoll? Zu Beginn der Entwicklung (b(t) sehr klein) soll exponentielles Wachstum herrschen. Daher sollte k·z der Proportionalitätsfaktor a aus der ersten Phase sein. Eine Alternative ist die Bestimmung von k aus gegebenen Funktionswerten (s.u.)

Auf diese Gleichung wird die Partialbruchzerlegung $\frac{xw}{y(w-y)} = \frac{x}{y} + \frac{x}{w-y}$ angewandt:

$$\frac{b'(t)}{b(t)(z-b(t))} = k \Leftrightarrow \frac{\frac{b'(t)}{z}}{b(t)} + \frac{\frac{b'(t)}{z}}{z-b(t)} = k \Leftrightarrow \frac{b'(t)}{b(t)} + \frac{b'(t)}{z-b(t)} = kz$$

Integration liefert:
$\ln(b(t)) + c_1 - \ln(z - b(t)) + c_2 = kzt + c_3$ und somit

$$\ln\left(\frac{b(t)}{z-b(t)}\right) = kzt + d \Leftrightarrow \frac{b(t)}{z-b(t)} = e^{kzt+d} \Leftrightarrow b(t) = \frac{z \cdot e^{kzt+d}}{1+e^{kzt+d}} \quad ^{1)}$$

Sei n die Anzahl der Anfangsindividuen, also n = b(0) = $\frac{z \cdot e^d}{1+e^d} \Leftrightarrow e^d = \frac{n}{z-n}$

Dies in [1)] eingesetzt liefert: $b(t) = \frac{ze^{at}\frac{n}{z-n}}{1+e^{at}\frac{n}{z-n}}$ $mit\ a = kz \Leftrightarrow b(t) = \frac{ze^{at}n}{z-n+e^{at}n}$

Das Erweitern mit e^{-at} liefert: $b(t) = \frac{zn}{(z-n)e^{-at}+n}$, a Proportionalitätsfaktor aus der 1. Phase

$$\lim_{t\to\infty} b(t) = z$$

$$b(t) = \frac{ze^{at}n}{z-n+e^{at}n}$$

$$b'(t) = \frac{azn(z-n)e^{at}}{((z-n)e^{-at}+n)^2}$$

$$b''(t) = \frac{a^2zn(z-n)e^{at}(e^{at}n-z+n)}{((z-n)e^{-at}+n)^3}$$

Der Wendepunkt ist: $\left(\frac{1}{a}\ln\frac{z-n}{n};\frac{z}{2}\right)$

Weltbevölkerung:
1970: 3,6 (Milliarden)
2000: 6 (Milliarden)

Sättigungsgrenze: z = 13,3
Anfangspopulation: n = 3,6

Wachstumsfaktor pro Jahr bei exponentiellem Wachstum: $f = \sqrt[30]{\frac{6}{3,6}}$

a = ln(f) = 0,01703

$$b(t) = \frac{13,3 \cdot 3,6}{(13,3-3,6) \cdot e^{-0,01703 \cdot t} + 3,6} = \frac{47,88}{9,7 \cdot e^{-0,01703 \cdot t} + 3,6}$$

b(30) = 5,08. Also muss a angepasst werden:

$$6 = \frac{47,88}{9,7 \cdot e^{-a \cdot 30} + 3,6}$$

Es folgt a = 0,0265

2. Beispiel (Wachstum bei Behinderungen)

Beim exponentiellen Wachstum lautete die Gleichung für den diskreten Fall $a_{n+1} = (1+g-s) \cdot a_n$. Wächst die Population, so kommt es wegen des Gedränges zu einem erhöhten Stress, der die Individuen anfälliger für Krankheiten macht und die Sterberate anwachsen lässt. Sei s proportional zu a_n, also: $s = v \cdot a_n$. Es folgt $a_{n+1} = (1+g-v \cdot a_n) \cdot a_n = \left[1 + v \cdot \left(\frac{g}{v} - a_n\right)\right] a_n$. Man kann zeigen, dass

$z = \frac{g}{v}$ der Grenzwert der Folge ist. Die Population wächst also nicht über z hinaus.

Durch Umformung erhält man $\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n \cdot (z - a_n)} = v$

Der Zuwachs ist also sowohl proportional zum Bestand a_n als auch zu $z - a_n$. Damit liegt logistisches Wachstum vor.
Für das stetige Modell erhält man also: $b'(t) = k \cdot b(t) \cdot (z - b(t))$
Beispiel: g = 20%; v = 0,002; Anfangsindividuen n = 10.

Man erhält: $z = \frac{g}{v} = 100$; a = ln(1+g) = 0,1823

$$b(t) = \frac{100 \cdot 10}{(100-10)e^{-0,1823 \cdot t} + 10} = \frac{1000}{90e^{-0,1823 \cdot t} + 10}$$

Einige Werte:

T	b(t)
10	41
17	71
20	81
26	93
30	96
40	99

Alternative Herleitung des diskreten Modells:
Die Sterberate wird als steigende lineare Funktion in Abhängigkeit von der Population festgelegt:
$s = m_s \cdot a + s_0$ (s_0: anfängliche Sterberate; a: Population; m_s: Steigung der Geraden)
Die Geburtenrate wird als fallende lineare Funktion dargestellt: $g = m_g \cdot a + g_0$

Die Kapazitätsgrenze z ergibt sich als Schnittstelle der beiden Funktionsgraphen: $z = \frac{g_0 - s_0}{m_s - m_g}$

Berechnung der Zuwachsrate: $r = m_g \cdot a + g_0 - (m_s \cdot a + s_0) = g_0 - s_0 - (m_s - m_g) \cdot a = r_0 - \frac{r_0}{z} \cdot a$

Somit lautet die Gleichung für das logistische Wachstum: $a_{n+1} = a_n + a_n \cdot \left(r_0 - \frac{r_0}{z} \cdot a_n \right)$

Mit $r_0 = g$ und $g = \frac{z}{v}$ ergibt sich obige Gleichung.

g) Gerüchteverbreitung

Die Verbreitungsgeschwindigkeit von Nachrichten oder Gerüchten unter einer Gruppe von Menschen bekannter Anzahl ist nach einer Untersuchung von Soziologen zunächst proportional zu der Anzahl der bereits Informierten und im weiteren proportional zur Anzahl der noch nicht Informierten. Es liegt als für die Anzahl b(t) der Informierten logistisches Wachstum vor.

Für eine Gruppe von 400 Personen, von denen zum Zeitpunkt t = 0 genau eine Person informiert ist, gelte die statistisch belegte Proportionalitätskonstante k = 0,001. Wieviel Personen sind nach 20 Zeiteinheiten informiert?

Mit den Bezeichnungen aus e) folgt: z = 400; n = 1; k = 0,001; $a = k \cdot z = 0{,}4$ und

$b(t) = \frac{zn}{(z-n)e^{-at} + n} = \frac{400}{399e^{-0{,}4t} + 1}$ und somit b(20) = 353

h) Wachstum mit Selbstvergiftung

$b'(t) = \left[r - a\int_0^t b(\tau)d\tau \right] \cdot b(t)$ **r: Zuwachsrate; a: Wirkungsstärke des Gifts**

(zum zugehörigen diskreten Modell siehe: Paper Populationen)

i) Fallschirmsprung

Aus Unterrichts-Materialien Analysis für Lehrkräfte - STARK Verlag.

Für die Durchführung eines Fallschirmsprunges gibt es zwei Varianten. Sprünge aus größeren Höhen beginnen zum Schutz des Springers gegen die Kälte mit einer längeren Freiflugphase, dem so genannten Verzögerungssprung (bei dem Weltrekordsprung des Amerikaners Kittner aus 30.000 m Höhe umfasste dieser Teil 25.600 m). Nach einer gewissen Fallstrecke öffnet sich der Fallschirm, so dass sich der Betrag der Geschwindigkeit ständig verringert. Die zweite Möglichkeit besteht darin, sofort mit geöffnetem Fallschirm zu springen.

1. Die Freiflugphase

Die Abbildung zeigt den t-v-Graphen für einen Verzögerungssprung auf einer Strecke von 1000 m.

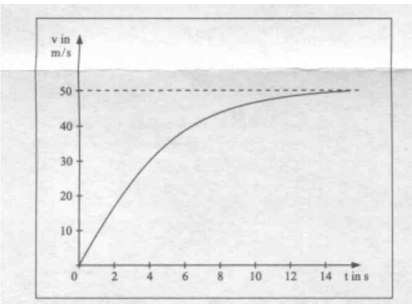


Abb. 1

a) Beschreiben und erklären Sie das Diagramm!

b) In den ersten 5 Sekunden nimmt die Beschleunigung a etwa linear ab. Ermitteln Sie für diesen Zeitraum anhand der Abbildung I die Beschleunigungswerte a, skizzieren Sie das t-a-Diagramm, und geben Sie das Gesetz an!

c) Übertragen Sie Abbildung I auf Ihr Blatt, und zeichnen Sie zum Vergleich den Graphen des t-v-Gesetzes für den freien Fall ein!

2. Der Sprung mit geöffnetem Fallschirm

Bei geöffnetem Fallschirm nimmt die Beschleunigung mit zunehmender Geschwindigkeit v ab. Das Gesetz lautet:

$a = g - k \cdot v$ (1)

Die Konstante k ergibt sich aus verschiedenen Faktoren wie Luftdichte, Größe des Fallschirms, Masse des Springers u.Ä. Das zugehörige Zeit-Weg-Gesetz lautet:

$$s = \frac{g}{k} \cdot \left[t - \frac{1}{k}(1 - e^{-k \cdot t}) \right] \quad (2)$$

a) Ermitteln Sie das t-v-Gesetz!

b) Bestätigen Sie Gleichung (1)!

c) Geben Sie den Maximalbetrag der Fallgeschwindigkeit an! Zu welchem Zeitpunkt wird v_{max} erreicht?

d) In einem konkreten Fall erreichte der Springer die Erdoberfläche mit der Geschwindigkeit $v_{max} = 6\ m \cdot s^{-1}$. Wie lauten das t-a-Gesetz und das t-v-Gesetz? Skizzieren Sie den Graphen!

e) Welche Strecke hat der Fallschirmspringer nach zehn Sekunden zurückgelegt?